CÁLCULO PLÁSTICO DE ESTRUCTURAS DE BARRAS: TEORÍA
Tercera edición

Guillermo Rus Carlborg [1]

Marzo de 2008

[1]Profesor Contratado Doctor. Departamento de Mecánica de Estructuras. Universidad de Granada.

© copyright 2008: Guillermo Rus Carlborg
ISBN: 84-96856-48-8
Depósito legal: GR-507-2008
Editor: Departamento de Mecánica de Estructuras e I. H., Universidad de Granada

Introducción para el estudiante

Estas notas han sido preparadas para ayudar al estudiante a seguir la asignatura, no como sustituto de las clases, sino para complementarlas y ayudar a estructurar los conocimientos, exponiéndose todos los conceptos complejos que pueden quedar diluidos en una exposición verbal.

Mediante el estudio de este bloque de la asignatura *Análisis de Estructuras I* se pretende profundizar en el conocimiento de los conceptos introducidos en *Teoría de Estructuras*, así como exponer una familia de métodos avanzados de cálculo de estructuras. Las ventajas del cálculo plástico se pueden resumir en una reducción de costes mediante un diseño más racional, aprovechando su funcionamiento hiperestático en régimen no lineal y teniendo en cuenta sus mecanismos de colapso.

Para asimilar con solidez los contenidos de este bloque, es indispensable dominar los conceptos tratados en las asignaturas de Teoría de Estructuras, Mecánica de Medios Continuos, y conocer el cálculo matricial de estructuras de barras. También se darán por conocidos conceptos básicos de álgebra matricial y vectorial.

Agradecimientos

Quiero agradecer a Paqui Peña su dedicación para ilustrar este libro, a Rafael Gallego su auspicio de este trabajo, y no menos a Paloma por todo el apoyo y ánimo para terminarlo.

Índice general

1. Plasticidad unidimensional **1**

1.1. Introducción 1

1.1.1. Contraste entre cálculo elástico y plástico 2

1.1.2. Contexto normativo 4

1.2. Caso unidimensional 5

1.2.1. Carga monotónica 5

1.2.2. Descarga 6

1.2.3. Inversión de signo 6

1.2.4. Relaciones básicas 6

1.2.5. Relaciones tensión-deformación 7

1.2.6. Endurecimiento 8

2. Plasticidad en barras **11**

2.1. Principios 12

2.1.1. La rótula plástica 12

2.1.2. Propiedades del acero 15

2.1.3. Momento plástico 15

2.2. Generalizaciones 19

2.2.1. Efecto del axil 19

2.2.2. Efecto del cortante 19

2.2.3. Perforaciones 20

2.2.4. Factores de reducción 20

2.2.5. Zonas parcialmente plastificadas 21

2.3. Criterios para mecanismo de colapso válido 22

2.3.1. Condiciones de equilibrio, mecanismo y plastificación . 22

2.3.2. Teorema del mínimo 23

2.3.3. Teorema del máximo 24

2.3.4. Teorema de unicidad 25

2.4. Calculo plástico de barras continuas 25

3. PTV **31**
3.1. Enunciado 31
3.1.1. Pórtico plástico 32
3.1.2. Demostración 32
3.2. Uso del PTV para determinación de leyes de momentos y deformadas 39

4. Plasticidad en estructuras de barras **41**
4.1. Combinación de mecanismos 41
4.1.1. Introducción 41
4.1.2. Descripción 42
4.1.3. Secciones críticas 43
4.1.4. Número de mecanismos independientes 43
4.2. Mecanismos de colapso 44
4.2.1. Mecanismo de cimbreo 44
4.2.2. Mecanismo de barra 45
4.2.3. Mecanismos combinados 45
4.2.4. Mecanismos completo, parcial y sobrecompleto 46

5. Dimensionamiento óptimo **61**
5.1. Simplificaciones 61
5.2. Formulación general 62
5.3. Teoremas 63

Capítulo 1

Nociones sobre plasticidad unidimensional

Índice

1.1. Introducción

1.1.1. Contraste entre cálculo elástico y plástico

1.1.2. Contexto normativo

1.2. Caso unidimensional

1.2.1. Carga monotónica

1.2.2. Descarga

1.2.3. Inversión de signo

1.2.4. Relaciones básicas

1.2.5. Relaciones tensión-deformación

1.2.6. Endurecimiento

1.1. Introducción

Aunque los primeros estudios sobre el comportamiento plástico de barras son muy anteriores, las primeras publicaciones que sugirieron la posibilidad de dimensionar utilizando la ductilidad de los metales provienen de Hungría en 1914 y de Holanda en 1917, cuando se comprobó que una viga biempotrada sólo colapsaría cuando se produjera plastificación en tres secciones, en los empotramientos y en alguna sección central. Hacia la década de los 40, tras varios tanteos en Alemania y en EEUU, Baker y sus colaboradores en

Cambridge comenzaron una serie de ensayos sistemáticos en pórticos que darían el impulso a la actual teoría, que se viene aplicando en la construcción de estructuras civiles desde los años 50.

1.1.1. Contraste entre cálculo elástico y plástico

A modo de introducción, veamos, sobre un ejemplo muy sencillo, aún antes de haber afianzado los conocimientos necesarios para comprenderlo completamente, la diferencia esencial que aporta el cálculo plástico sobre el elástico. Comparemos el momento flector característico de la sección mínimo que permita a una viga soportar una carga uniforme w cuando se sustenta sobre apoyos simples o sobre empotramientos.

En el primer caso (I), se dibuja en la Fig. 1.1 que la ley de momentos que asume es parabólica, y el punto donde falla elásticamente es la sección central con momento máximo $M_p = \frac{wL^2}{8}$, que es el momento plástico. Lo

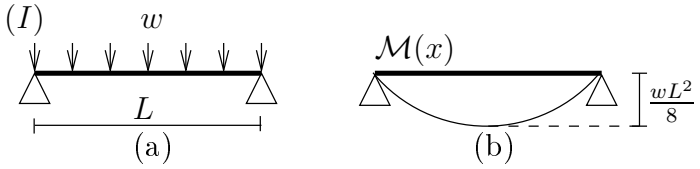


Figura 1.1: a) Viga biapoyada con carga uniforme w. b) Ley de momentos de la viga.

que sucederá si seguimos cargando la viga, asumiendo un comportamiento elástico-plástico perfecto, como se describirá en el próximo capítulo, es que se formará una rótula plástica incapaz de absorber más momento que M_p, y se producirá una deflexión incontrolada sin incremento de carga. Esta situación define el mecanismo de colapso. Por ello, la carga de colapso elástico coincide con la del plástico,

$$w_e^I = w_p^I = \frac{8M_p}{L^2}$$

Sin embargo, si las condiciones de apoyo son de tipo empotramiento (II, Fig. 1.2), la ley de momentos en el régimen elástico viene descrita en la Fig. 1.2-b. En el instante en el que el momento máximo, que se sitúa en ambos apoyos, alcanza el valor M_p, dichas secciones plastifican y su giro adoptará cualquier valor mientras que el momento permanecerá con valor M_p. En este instante se ha alcanzado el valor máximo de la carga w para el fallo elástico,

$$w_e^{II} = \frac{12M_p}{L^2}$$

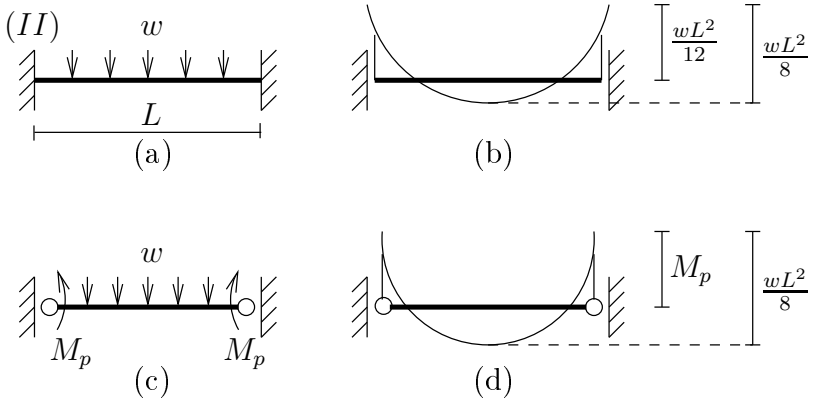


Figura 1.2: a) Viga empotrada con carga uniforme w. b) Ley de momentos de la viga antes de que plastifique ninguna sección. c) Momento en el que plastifican las secciones empotradas. d) Ley de momentos de la viga con secciones plastificadas.

Esta situación se describe en Fig. 1.2-c, y su ley de momentos será Fig. 1.2-d. La viga descrita en Fig. 1.2-c sigue conservando el equilibrio puesto que no ha alcanzado la condición de mecanismo: sólo ha pasado de hiperestática a isostática. Pero si seguimos incrementando el valor de w, cuando el momento flector en el centro del vano alcanza el valor M_p, dicha sección también plastificará y la viga colapsará en forma de mecanismo con tres rótulas, dos en los extremos y una en el centro. En ese instante, el valor de la carga de colapso plástico es,

$$w_p^{II} = \frac{16M_p}{L^2}$$

De todo esto se deduce que, en cálculo elástico, una viga biempotrada soporta un 50 % más de carga que una biapoyada, pues $w_e^{II}/w_e^I = 3/2$, mientras que en cálculo plástico, soporta un 100 % más $w_p^{II}/w_p^I = 2$. Esto implica que en un diseño plástico hace falta, en proporción, una sección de sólo 3/4 de la necesaria en un diseño elástico, dado que se aprovecha la reserva resistente que proporciona el hiperestatismo. Además del ahorro económico que esto supone, el hecho de desaprovechar el funcionamiento añadido de los grados de hiperestatismo refleja la naturaleza ilógica del diseño basado exclusivamente en el límite elástico.

En otras palabras, el diseño elástico de una estructura isostática genera un margen de seguridad inferior frente al colapso que en el caso de una hiperestática. Esta diferencia injustificada se debe a que no se tiene en cuenta que muchas estructuras pueden seguir funcionando satisfactoriamente pasado

este límite.

En lo referente a las técnicas de cálculo, es necesario recordar que el principio de superposición deja de ser válido al no cumplirse la premisa de comportamiento elástico lineal.

Otro aspecto en el que la plasticidad cobra crucial importancia es el cálculo sísmico. En él se utiliza el concepto de ductilidad como la propiedad de deformarse en régimen plástico sin perder resistencia, es decir, la razón entre deformación plástica de colapso y la deformación elástica máxima. A los edificios de hormigón se les exige que los empotramientos sean dúctiles, de modo que en caso de sismo plastifique globalmente y se disperse la energía sísmica a través de los fenómenos histeréticos inherentes a la plasticidad.

1.1.2. Contexto normativo

El uso práctico del cálculo plástico de estructuras tiene como referencia más cercana la normativa birtánica BS5950, publicada en 1985 después de la BS449 de 1949, sometiéndose a revisión en 1990. El principal campo de aplicación es el de pórticos planos, que suelen aparecer en edificación de una planta, que acapara la mitad de las construcciones.

En cuanto a la normativa aplicable en España, el Eurocódigo 3 (EC3) da unas mínimas reglas en lo que refiere a la plasticidad, que se pueden resumir en:

Art. 3.2.2 Características del acero laminado en caliente. Se establecen los valores nominales de las características mecánicas de cada tipo de acero.

Art. 3.2.2.2 Análisis plástico. La relación entre resistencia última y el límite elástico será al menos de 1,2, el alargamiento para una rotura calibrada del 15 %, y el alargamiento de rotura será al menos 20 veces el del límite elástico.

Art. 5.2.1.4 Análisis global plástico. Pueden usarse los métodos rígido-plástico o elasto-plástico, y dentro de éste último se distingue el elástico-plástico y elástico-perfectamente plástico (utilizando un diagrama bilineal de tensión-deformación).

Art. 5.2.6.3 Análisis plástico de pórticos traslacionales. En general se utilizará análisis elasto-plástico, que incluirá efectos de segundo orden, pero se puede usar el rígido-plástico en pórticos de hasta dos plantas sin rótulas plásticas en los pilares o pórticos cuyos pilares cuyas rótulas plásticas únicamente se forman en sus bases.

Art. 5.2.7 Requisitos de los pilares para el análisis plástico. Se requiere una capacidad de giro mínima, lo cual se satisface automáticamente en un cálculo elasto-plástico. Si se hace un cálculo rígido-plástico se establece una condición sobre la esbeltez de los pilares.

Art. 5.3.3 Condiciones de la secciones transversales. Las secciones con rótula plástica tendrán un eje de simetría en el plano de carga, tendrán suficiente capacidad de giro. Se definen ciertas clases de sección según los efectos locales de abolladura, a cumplir en piezas de sección variable.

1.2. Caso unidimensional

Vamos a recordar los conceptos fundamentales del comportamiento plástico sobre un ejemplo unidimensional. Un estado de tensiones uniaxial es aquel en el que hay una sóla tensión principal no nula, que puede ser positiva (tracción) o negativa (compresión).

1.2.1. Carga monotónica

En la Fig. 1.3-a se muestra un diagrama de tensión deformación típico. Comenzando por un estado de reposo de origen O_0, hasta la tensión Y_{s0},

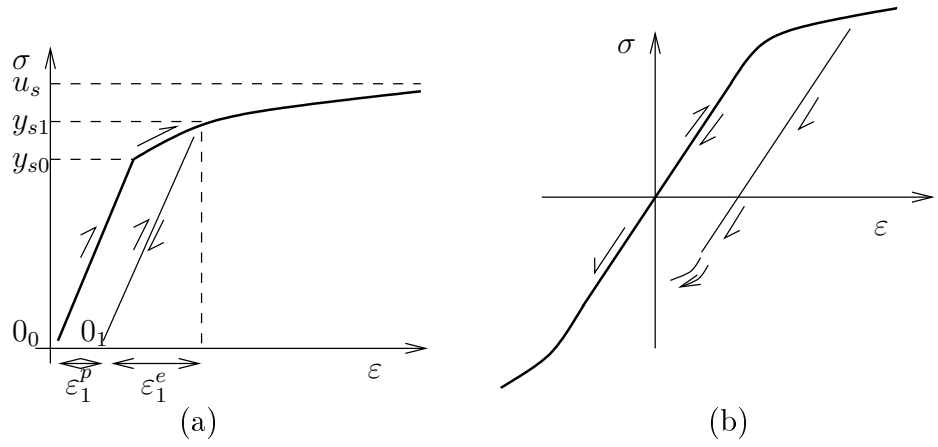


Figura 1.3: Diagrama de tensión deformación típico.

llamada límite elástico, el comportamiento, entendido como respuesta en términos de tensión σ frente a una deformación ε, es lineal elástico, y la descarga

sigue el mismo recorrido. Pasado este punto, el material se comporta plásticamente de modo irreversible. La pendiente de la curva decrece progresivamente y finalmente el material falla, alcanzando una tensión máxima U_s.

1.2.2. Descarga

Si se revierte el proceso de carga una vez pasado el límite elástico, en un punto de deformación $\varepsilon_1^p + \varepsilon_1^e$, dicha descarga se produce según una línea con la misma pendiente elástica lineal, definida por el módulo elástico. Sin embargo deja una deformación remanente o plástica ε_1^p, pues sólo se recupera la deformación elástica ε_1^e correspondiente a la línea recta. Si se repite el proceso, se comenzaría por el nuevo origen O_1, con una nueva ley elástica con límite elástico Y_{s1}.

De aquí se deduce que la ley de comportamiento depende del recorrido o historia de carga.

1.2.3. Inversión de signo

Los metales suelen presentar leyes de comportamiento simétricas frente a tracción y compresión. Sin embargo, si el metal ha sido previamente sometido a carga hasta plastificación, la nueva ley de comportamiento puede variar significativamente, lo cual se denomina *efecto Bauschinger*. Esto se ilustra en la Fig. 1.3-b.

1.2.4. Relaciones básicas

Puesto que la ley de comportamiento depende de la historia, no se puede expresar mediante una ley explícita, por lo que se recurre a una formulación incremental como úna vía sistemática de encontrar la solución. Esta formulación parte de la formulación diferencial, en la que simplemente se recurre a tomar los diferenciales con tamaños finitos a efectos de encontrar su solución numérica. Cualquiera de las variables va a evolucionar como la suma de los intervalos en los que los dividiremos, como por ejemplo la deformación $\varepsilon = \sum d\varepsilon$. En la Fig. 1.4 el incremento de deformación $d\varepsilon$ se descompone en una parte elástica y una plástica, de modo tal que la formulación incremental queda,

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p$$
$$d\sigma = E_t d\varepsilon = E d\varepsilon^e = E_p d\varepsilon^p$$

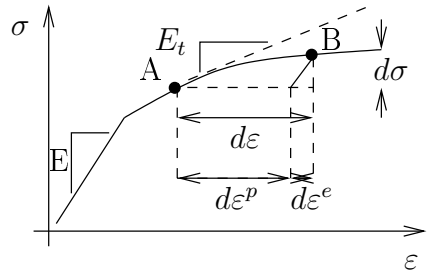


Figura 1.4: Incrementos de tensión y deformación.

donde E, E_t y E_p son los módulos de Young, tangencial y plástico respectivamente. Los dos últimos son asimismo función de la historia de carga. Por otra parte,

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \qquad E_p = \frac{d\sigma}{d\varepsilon_p} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{E_t} = \frac{1}{E} + \frac{1}{E_p}$$

En el caso de carga, pasado el límite elástico, se acumula deformación plástica, mientras que eso no ocurre en el caso de descarga. La distinción entre estos casos se puede definir mediante el llamada *criterio de carga*, con las formas alternativas,

$$\begin{aligned} \sigma = \sigma_y \qquad & \sigma d\sigma > 0 \\ \varepsilon = \varepsilon_y \qquad & \varepsilon d\varepsilon > 0 \end{aligned}$$

Los valores σ_y o ε_y son el máximo valor que haya alcanzado en su historia el material, y son distintos para compresión y para tracción.

1.2.5. Relaciones tensión-deformación

Existen muchos modelos disponibles para describir el comportamiento elastoplásico bajo carga monotónica, de los que los más significativos son los siguientes.

El más simple es el modelo **elástico - perfectamente plástico**, en el que el se obvia el fenómeno del endurecimiento, y viene definido por,

$$\begin{aligned} \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \qquad & \leftarrow \qquad \sigma < Y_s \\ \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \lambda \qquad & \leftarrow \qquad \sigma = Y_s \end{aligned}$$

donde λ es un escalar positivo.

Otros modelos simples son el **elástico - endurecimiento lineal**, que se caracteriza por asumir un módulo tangencial E_t constante,

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\sigma}{E} \quad &\leftarrow \quad \sigma \leq Y_s \\ \varepsilon &= \frac{\sigma}{E} + \frac{1}{E_t}(\sigma - Y_s) \quad &\leftarrow \quad \sigma > Y_s \end{aligned}$$

o el **elástico - endurecimiento exponencial**,

$$\begin{aligned} \sigma &= E\varepsilon \quad &\leftarrow \quad \sigma \leq Y_s \\ \sigma &= k\varepsilon^n \quad &\leftarrow \quad \sigma > Y_s \end{aligned}$$

1.2.6. Endurecimiento

Los valores de E_t y de Y_s dependen de la historia de carga, y se suelen representar en función del *parámetro de endurecimiento* o variable interna de plasticidad, usualmente denotada por κ. Los más usados son:

$$\begin{aligned} \kappa &= \int \sqrt{d\varepsilon^p d\varepsilon^p} \quad &\text{deformación plástica equivalente} \\ \kappa &= \int \sigma d\varepsilon^p \quad &\text{trabajo plástico} \\ \kappa &= \int d\varepsilon^p \quad &\text{deformación plástica} \end{aligned}$$

Nótese que la última definición, ε^p, no es una buena medida de la historia de carga puesto que es reversible, en el sentido de que es posible invertir el sentido de la carga hasta que $\varepsilon^p = 0$ y por tanto se *olvide* la historia de carga.

Las reglas de endurecimiento expresan la relación entre Y_s y κ. Los tres modelos más simples que representan las alternativas de comportamiento del efecto Bauschinger, se describen en la Fig. 1.5.

La regla de endurecimiento **isótropo** especifica que el comportamiento a tracción y compresión es simétrico,

$$|\sigma| = |\sigma(\kappa)|$$

La regla de endurecimiento **cinemática** especifica que la diferencia entre tensión de plastificación en tracción Y_s^t y compresión Y_s^c es constante,

$$Y_s^t(\kappa) - Y_s^c(\kappa) = 2Y_{s0}$$

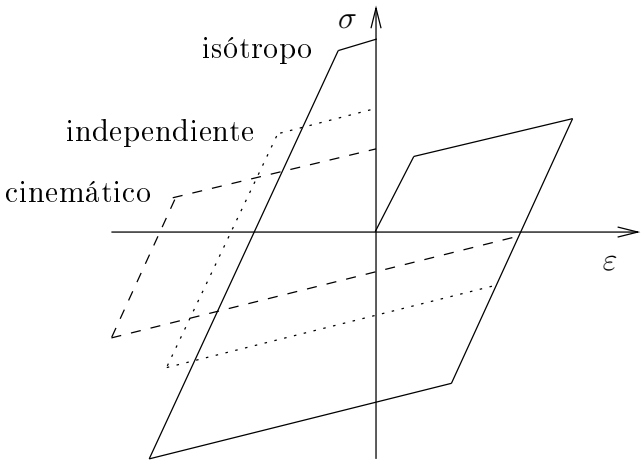


Figura 1.5: Reglas de endurecimiento.

En tercer lugar, la regla **independiente** establece que la tensión de plastificación a tracción y compresión guardan historias independientes κ^t y κ^c, sin afectarse entre sí,

$$\begin{aligned} \sigma = Y_s^t(\kappa^t) \quad &\leftarrow \quad \sigma > 0 \\ \sigma = Y_s^c(\kappa^c) \quad &\leftarrow \quad \sigma < 0 \end{aligned}$$

Se puede comprobar que en una estructura hiperestática, sometida a una historia de carga en la que en alguno de sus elementos se supere el límite elástico, desarrollará deformaciones remanentes distintas en cada elemento, y por tanto tensiones residuales, aún cuando desaparezcan las cargas que las originaron. Este fenómeno conlleva multitud de consecuencias resistentes y es objeto de estudio para la mejora de los diseños estructurales.

Los conceptos presentados hasta aquí se pueden extender del caso unidimensional al tridimensional, en el que σ, ε^p o ε^e pasan de ser escalares a tensores, y E pasa a sustituirse por el tensor de rigidez C_{ijkl}. La tensión de plastificación Y_s se sustituye por una superficie de plastificación $f(\sigma_{ij}) = 0$, que evolucionará en función de la historia de tensiones o deformaciones. La extensión de los anteriores conceptos al caso tridimensional multiplica su complejidad. Su estudio en detalle requiere de técnicas computacionales con las que resolver numéricamente las ecuaciones diferenciales que describen los campos de distribución de la plasticidad y su evolución en el esquema incremental descrito en función de la historia de carga. Esto sólo se menciona a título informativo, puesto que escapa de los objetivos de la presente introducción.

Capítulo 2

Plasticidad en barras

Índice

2.1. Principios

2.1.1. La rótula plástica

2.1.2. Propiedades del acero

2.1.3. Momento plástico

2.2. Generalizaciones

2.2.1. Efecto del axil

2.2.2. Efecto del cortante

2.2.3. Perforaciones

2.2.4. Factores de reducción

2.2.5. Zonas parcialmente plastificadas

2.3. Criterios para mecanismo de colapso válido

2.3.1. Condiciones de equilibrio, mecanismo y plastificación

2.3.2. Teorema del mínimo

2.3.3. Teorema del máximo

2.3.4. Teorema de unicidad

2.4. Calculo plástico de barras continuas

2.1. Principios

2.1.1. La rótula plástica

Para entrar de lleno en la concepción del cálculo plástico de pórticos, vamos a ilustrar el caso de una viga biapoyada de acero blando (Fig. 2.1-a) sometida a una carga uniforme w escalada por un factor de carga λ, que va a crecer desde cero hasta el momento del colapso. En la Fig. 2.1-b se representa cualitativamente la evolución del factor de carga conforme crece la deflexión en un punto, por ejemplo el central.

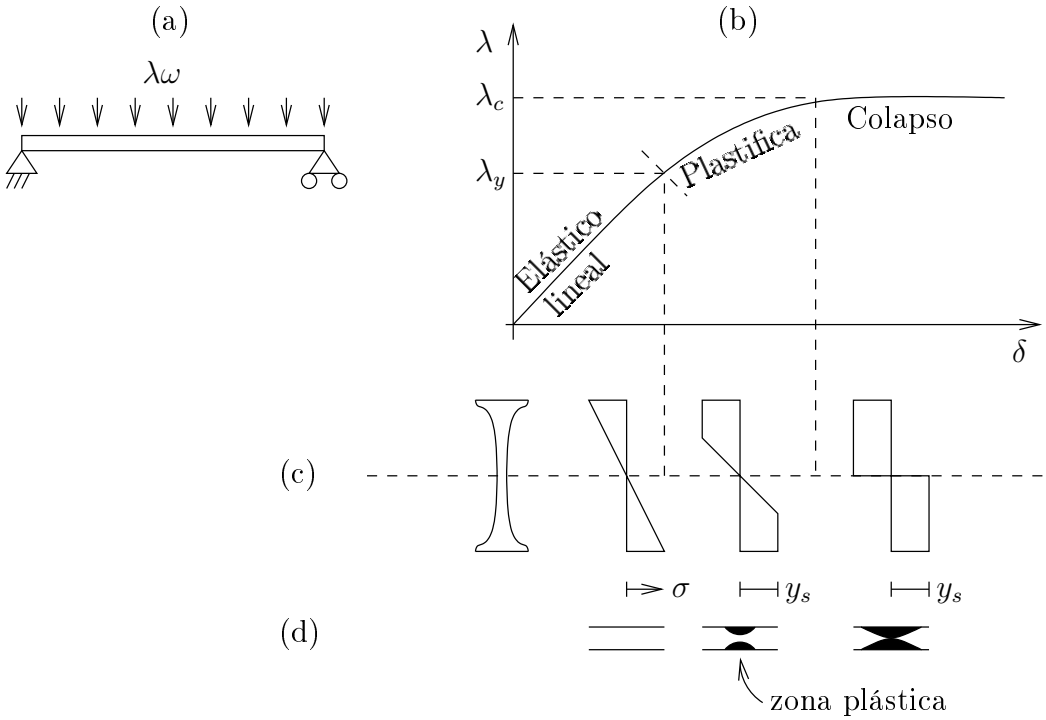


Figura 2.1: a) Viga biapoyada con carga uniforme λw. b) Evolución del factor de carga - deflexión, y la distribución de tensiones en la sección central para cada instante.

Conforme la carga crece, la distribución de tensiones en la sección central va pasando por diversos estadios, representados sobre la Fig. 2.1-c. La zona plástica dentro de la viga se distribuye espacialmente según lo indicado en la Fig. 2.1-d.

Fase elástica lineal. Se produce mientras la tensión máxima en todos los puntos de la viga no alcance la de plastificación Y_s. Durante el com-

portamiento elástico lineal, la distribución de tensiones a lo largo del canto de la sección es lineal (bajo la hipótesisde Bernouilli de sección plana). Ello se debe a que la tensión es linealmente proporcional a la elongación, que a su vez es proporcional al brazo hasta la fibra neutra debido al giro de la sección que rige la deformación a flexión. Ello implica que el diagrama de factor de carga - deflexión también es lineal, mientras $\lambda < \lambda_y$.

Fase de plastificación parcial. Cuando la elongación en cualquier punto de la viga supera la correspondiente a la plastificación, la tensión deja de crecer proporcionalmente, y la distribución de tensiones toma la forma descrita en la figura. En ésta sección se forma la rótula plástica. Esto sucede para $\lambda_y < \lambda < \lambda_c$. Si asumimos que la ley de comportamiento (diagrama de tensión-deformación, véase Fig.2.5-b) es bilineal, la tensión en los puntos con plastificación es constantemente igual a Y_s.

Colapso. En el momento extremo en el que todos los puntos de la sección de la rótula plastifican, dicha sección pierde su capacidad para seguir absorbiendo más carga y se deforma indefinidamente bajo carga constante (curva horizontal). Esto significa el colapso de la viga.

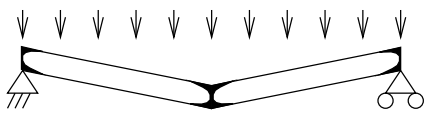


Figura 2.2: Mecanismo de colapso de una viga biapoyada.

Una vez producida la rótula plástica, la viga se comporta como en la Fig. 2.2, como un verdadero mecanismo, llamado mecanismo de colapso. Este ejemplo presenta dos principios básicos del cálculo plástico:

- Las estructuras fallan por medio del **mecanismo de colapso**.
- Dicho mecanismo se produce por la aparición de un número suficiente de **rótulas plásticas** como para que se produzca un movimiento de mecanismo.
- Las rótulas plásticas se definen por secciones en las que se produce plastificación completa, con la consecuencia de que pueden girar indefinidamente sin alteración del momento flector que las excita en ese instante, el cual se denomina **momento plástico** M_p.

En el caso de que la ley constitutiva del material no sea bilineal y exista endurecimiento por deformación, la última fase del diagrama no es totalmente horizontal sino que sigue ascendiendo ligeramente. Este efecto se suele ignorar quedando del lado de la seguridad. Existe sin embargo la posibilidad de que en hormigón armado se produzca el efecto inverso de ablandamiento por desagregación a compresión del hormigón.

En el ejemplo de viga biapoyada el mecanismo de colapso coincide con la formación de la rótula plástica, pero son fenómenos distintos. Para ver la diferencia se ilustra el caso de una viga biempotrada en la Fig. 2.3.

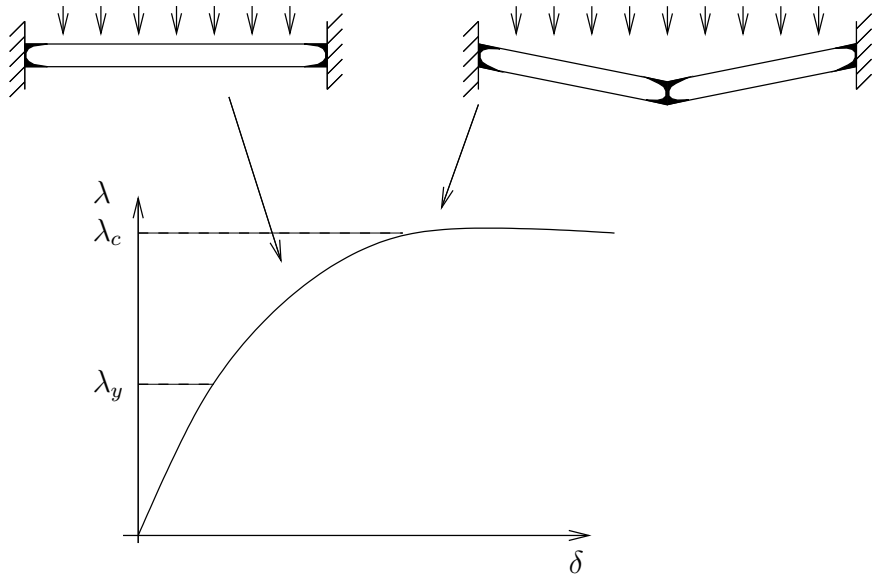


Figura 2.3: Mecanismo de colapso de una viga biempotrada.

Inicialmente la curva es lineal y las primeras rótulas plásticas se forman junto a los empotramientos, dado que allí son máximos los momentos flectores, que alcanzan el valor del momento plástico y dejan de crecer. En ese instante se reduce el grado de hiperestatismo de la viga, pero aún no es un mecanismo: existen rótulas plásticas pero no mecanismo de colapso. A causa de este cambio la deflexión se produce a más velocidad conforme crece la carga, cambiando la pendiente de la curva. Aumentando más el factor de carga, sin que crezca el momento flector en los empotramientos, crece el momento en el centro de la viga hasta alcanzar aquí también el valor del momento plástico y generarse una nueva rótula. Dicha rótula provoca que la estructura pase a ser un mecanismo y colapse finalmente.

En la Fig. 2.4 se describen otros ejemplos de colapso sobre pórticos con

distintas geometrías y cargas.

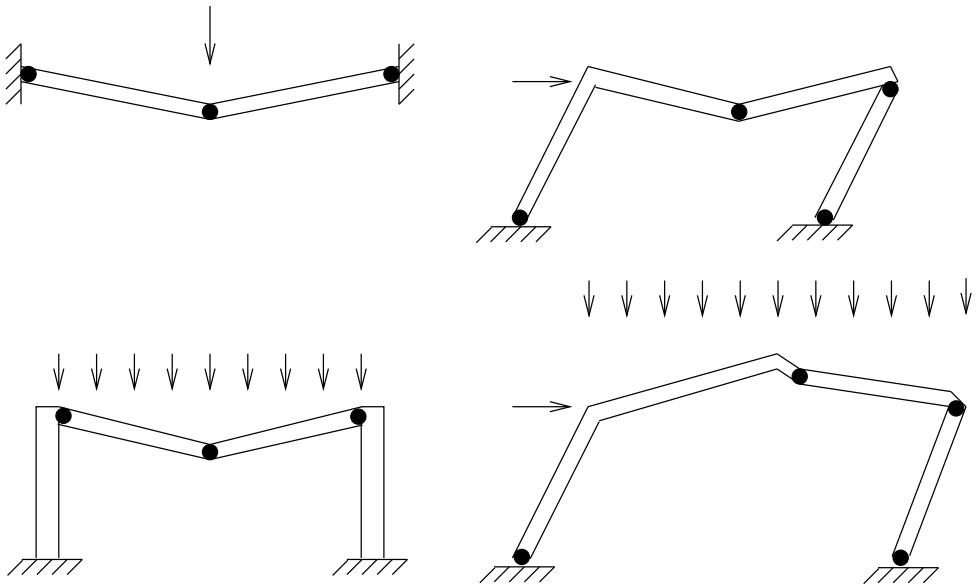


Figura 2.4: Ejemplos de mecanismos de colapso.

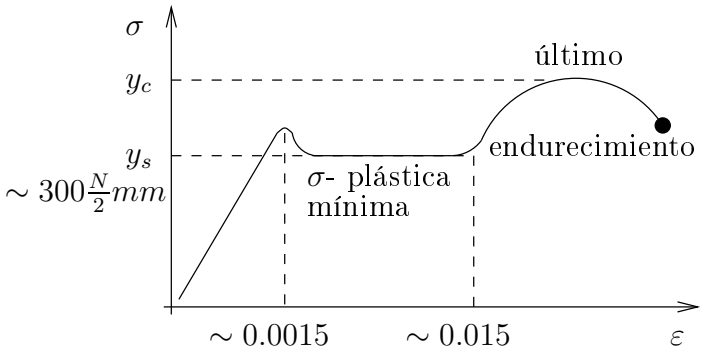
2.1.2. Propiedades del acero

El punto fuerte del diseño plástico proviene de las propiedades de ductilidad de muchos materiales, de los que el acero blando es un ejemplo particularmente útil. Esta ductilidad se puede estudiar a partir del diagrama de tensión-deformación típico de diversos aceros (Fig. 2.5-a). La primera simplificación que adoptaremos será la de asumir un diagrama bilineal (Fig. 2.5-b).

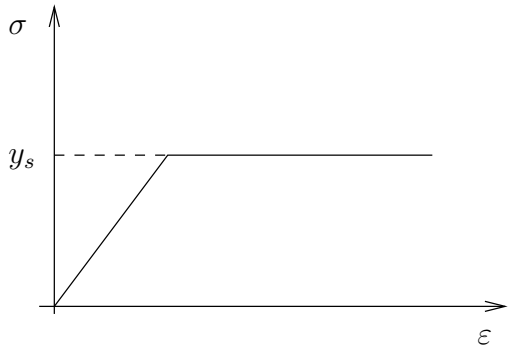
Las propiedades mecánicas del acero que vamos a adoptar son las dadas en las tablas 2.6 a 2.8.

2.1.3. Momento plástico

Para formalizar el concepto de rótula plástica demostrado anteriormente, hemos de entender que es una simplificación del comportamiento plástico de los elementos tipo barra, partiendo de la teoría general plástica del primer capítulo. Veremos las hipótesis que permiten modelizar la flexión de la barra pasado el límite elástico como un elemento unidimensional, reduciendo así su naturaleza tridimensional.



(a)



(b)

Figura 2.5: Diagramas de tensión-deformación: a) típicos, b) simplificado bilineal.

La viga de Euler-Bernoulli permite encontrar una relación sencilla carga-deformación (flecha) a partir de la teoría de la elasticidad lineal (ley de Hooke) gracias a la hipótesis de sección plana y al concepto de curvatura que representa el comportamiento de toda la sección. En el caso de una sección genérica, la determinación del momento plástico es muy simple. Partiendo de la Fig. 2.9 encontramos que si en el régimen elástico la tensión es nula en la fibra neutra, al completarse la rótula plástica la tensión se anula en la línea de igualdad de áreas, dado que la ley de tensiones no es proporcional al brazo sino constantemente igual a Y_s. En ese caso, el momento plástico es:

$$M_p = Y_s \frac{A}{2}(y_1' - y_2') = Y_s S_x \qquad S_x = \int_A \pm y' dA$$

Módulo de Elasticidad	E=205kN/mm^2
Coeficiente de Poisson	μ=0.30
Coeficiente de dilatación térmica lineal	α=1.2·10^{-5} ^{o}C^{-1}
Densidad	ρ=7850 kg/m^3

Figura 2.6: Propiedades mecánicas del acero.

Acero EC3	Espesor hasta (mm)	Tensión de diseño (N/mm^2)	Tensión última (N/mm^2)
Fe 360	40	235	360
	100	215	340
Fe 430	40	275	430
	100	255	410
Fe 510	40	355	510
	100	335	490
Fe E275	40	275	390
	100	255	370
Fe E355	40	355	490
	100	335	470

Figura 2.7: Propiedades mecánicas del acero según la EC3.

donde y_1', y_2' son los centros de gravedad de las áreas $A/2$ a tracción y compresión respectivamente, y S_x es el primer momento del área. Para automatizar el cálculo, es conveniente dividir la sección en polígonos de área A_i con brazo línea de igualdad de áreas - centro de gravedad del polígono y_i:

$$M_p = Y_s \sum_i A_i y_i'$$

El momento plástico también se suele denominar momento plástico completo o total, para distinguirlo del momento plástico de inicio, que es aquél en el que comienza a plastificar la sección, el cual viene descrito por la inercia elástica medida desde la fibra neutra:

$$M_y = Y_s Z = Y_s \int_A \frac{y^2}{d} dA$$

Finalmente existe el denominado factor de forma $\alpha = \frac{M_p}{M_y}$, que suele variar entre 1.15 y 1.2 para secciones en doble T, indicando la proximidad entre ambos momentos M_y y M_p. Esto nos lleva a una nueva simplificación de la curva

Acero BS5950	Espesor hasta (mm)	Tensión de diseño (N/mm^2)	Tensión última (N/mm^2)
43	16	275	410
	40	265	410
	63	255	410
	100	245	410
50	16	355	490
	40	345	490
	63	335	490
	100	325	490
55	16	450	550
	25	430	550
	40	415	550
	63	400	550

Figura 2.8: Propiedades mecánicas del acero según la BS5950.

de momento-curvatura en una rótula (2.10-a), por la que la ésta se aproxima a un diagrama bilineal eliminando la diferencia entre M_y y M_p (2.10-b). Una simplificación ulterior es la de considerar únicamente comportamiento plástico (2.10-c), lo cual simplifica enormemente el cálculo y lo hace generalmente más simple que el cálculo elástico tradicional.

Para ilustrar el cálculo completo en el caso sencillo de una sección rectangular de dimensiones $b \times h$, el momento flector en la sección en la que la fibra más cargada alcanza la tensión de plastificación, se deduce del equilibrio de áreas de tensiones como,

$$M_y = \frac{Y_s b h^2}{6}$$

Si continuamos bajo la hipótesis de Bernouilli, en el momento en el que toda la sección ha plastificado hasta tener una tensión constante Y_s, el momento flector resulta,

$$M_p = \frac{Y_s b h^2}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 1{,}5$$

En cualquier situación intermedia, definida por una porción elástica del canto h_e, el momento flector sigue la ley,

$$M = \frac{Y_s b h^2}{4}\left(1 - \frac{1}{3}\left(\frac{h_e}{h}\right)^2\right)$$

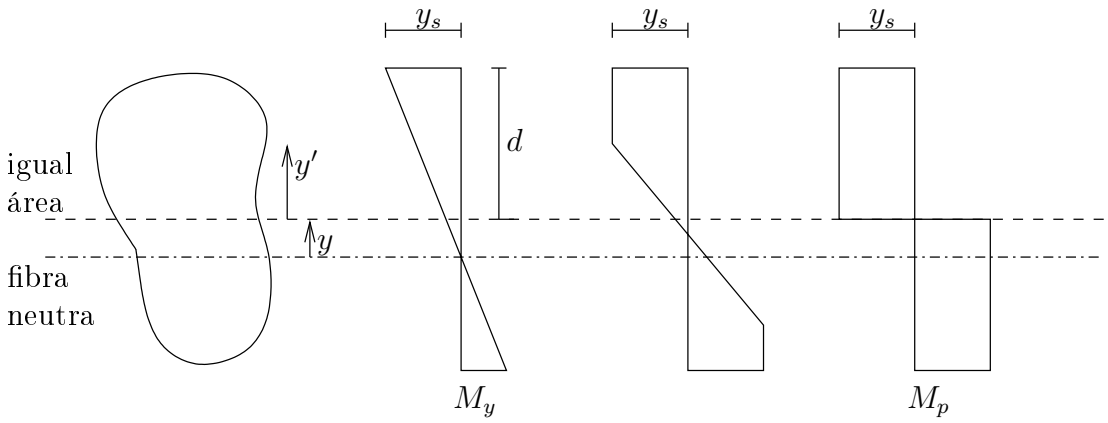


Figura 2.9: Determinación del momento plástico.

2.2. Generalizaciones

2.2.1. Efecto del axil

El caso más simple es el de una sección rectangular, como la dada en la (Fig. 2.11). El área de tensiones rayada (de canto a) es la que se equilibra con el axil $P = Y_s ba$, mientras que las otras dos áreas de tensiones simétricas equilibran al momento plástico bajo axil $M'_p = Y_s S'$. Si se define la fracción de área afectada por la compresión $n = \frac{a}{d}$, se conoce cuánto se reduce el momento plástico por el axil:

$$S' = 2b\left(\frac{d-a}{2}\right)\left(\frac{d+a}{4}\right) = \frac{bd^2}{4}(1-n^2) = S(1-n^2) \qquad \frac{M'_p}{M_p} = 1-n^2$$

donde el primer paréntesis corresponde al volumen de tensiones debido a la flexión (los dos rectángulos sin rallar), y el segundo paréntesis es el brazo (centro de gravedad de ambos rectángulos respecto al eje).

En el caso de una sección en I la influencia es incluso menor: para un axil considerable, de un 10 % de la tensión de plastificación, la reducción del momento plástico puede ser del orden de un 1 %.

2.2.2. Efecto del cortante

Esta reducción de momento plástico es más complicada de calcular, ya que depende del criterio de plastificación. Pero como para valores de cortante de hasta un 60 % de la capacidad a cortante de la sección se puede despreciar este efecto. Este caso se dará en vanos especialmente cortos.

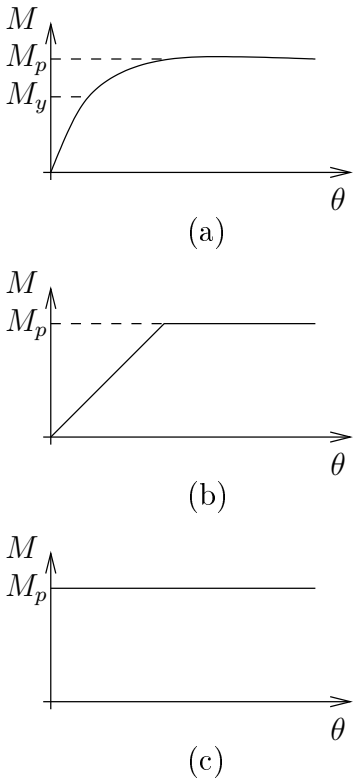


Figura 2.10: Diagrama momento-curvatura en una rótula.

2.2.3. Perforaciones

Las perforaciones utilizadas en roblones y tornillos afectan al momento plástico si se ubican en una sección donde se producirá rótula plástica o a una distancia inferior a un canto, en cuyo caso las normas establecen factores de reducción precalculados. Por otra parte se recomienda que el acabado de estas perforaciones sea taladrada.

2.2.4. Factores de reducción

Dado que el cálculo plástico se entiende generalmente como un estado límite último, se requieren tres factores: el de resistencia del material, el de carga y el de comportamiento de la estructura. Es posible combinarlos en un sólo factor de carga, generalmente entre 1,2 y 1,6.

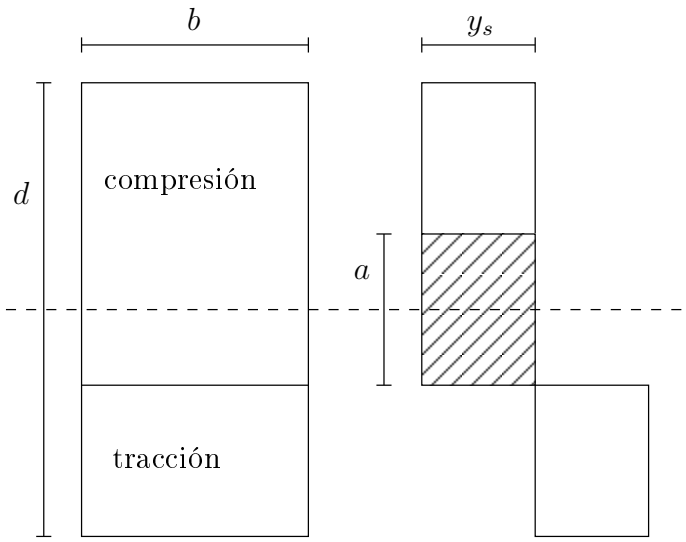


Figura 2.11: Sección cuadrada sometida a axil.

2.2.5. Zonas parcialmente plastificadas

Si suponemos el caso elemental de un voladizo de sección rectangular sometido a una carga puntual de la Fig. 2.12, donde se representa su ley de momentos, y recuperamos la ecuación que relaciona la porción de canto que se conserva elástico h_e, con el momento, válida para $-M_p \leq M \leq M_p$,

$$M = \frac{Y_s b h^2}{4}\left(1 - \frac{1}{3}\left(\frac{h_e}{h}\right)^2\right)$$

podemos despejar que,

$$\frac{h_e}{h} = \sqrt{3\left(1 - \frac{M}{M_p}\right)}$$

es una parábola que se extiende entre las dos secciones $x = 0$ y $x = L/3$, definiendo la zona plástica rallada en la Fig. 2.12-c.

En general se producirán regiones plastificadas con formas parecidas, entre triangulares y parabólicas, en función de la ley de momentos flectores, y en ocasiones puede ser importante conocer la extensión de la zona plástica, que en este caso alcanza un tercio del voladizo.

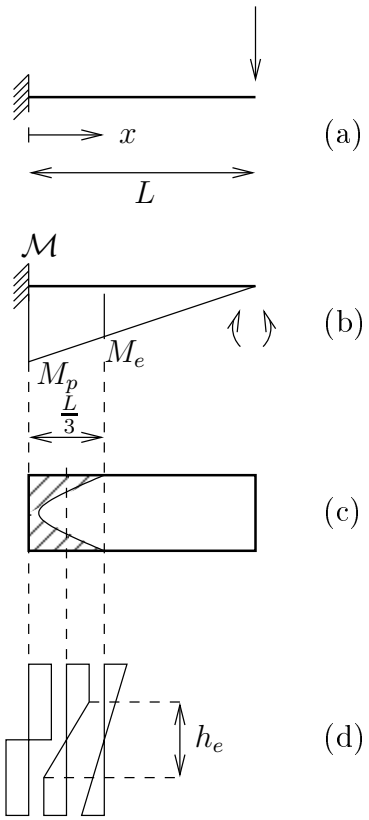


Figura 2.12: Voladizo y su zona plastificada.

2.3. Criterios para mecanismo de colapso válido

Observando la Fig. 2.4 puede intuirse que en una determinada estructura es posible definir más de un mecanismo de colapso según el reparto de cargas. De hecho, el primer paso para un cálculo es definir cuál es el mecanismo correcto, par lo cual se pueden recurrir a los teoremas del mínimo, del máximo y de unicidad. El siguiente paso será encontrar cuál será el factor de carga que lo excite y con ello se podrá determinar el diagrama de momentos flectores.

2.3.1. Condiciones de equilibrio, mecanismo y plastificación

Equilibrio. Los momentos flectores han de representar una ley en equilibrio entre las fuerzas internas y las fuerzas aplicadas.

Mecanismo. En el colapso, el momento flector ha de igualarse al momento plástico $\mathcal{M} = M_p$ en un número suficiente de secciones como para constituir un mecanismo en toda la estructura o una parte.

Plastificación. En ninguna sección el momento flector puede superar al momento plástico.

Es interesante comprobar que en cálculo plástico no existen condiciones de compatibilidad en las rótulas, con lo cual el colapso de una parte de la estructura no afecta a las demás partes. Esto simplifica especialmente el cálculo de vigas continuas.

2.3.2. Teorema del mínimo

En el análisis de una estructura, una elección arbitraria de mecanismo de colapso proporcionará una estimación de la carga de colapso (o factor de carga) mayor o igual que la correcta.

En otras palabras, los tanteos sobre distintos mecanismos de colapso proporcionan acotaciones superiores de λ_c, con lo que es un método del lado de la inseguridad. Estas elecciones satisfacen al menos la condición de **mecanismo**.

Este teorema permite deducir una metodología que vamos a aplicar a un caso sencillo de viga como en la Fig. 2.13-a, de momento plástico $M_p = 78$kNm. Las condiciones de equilibrio quedan aplicadas al dibujar la ley Fig. 2.13-b. Puesto que la estructura tiene dos grados de hiperestatismo, el equilibrio definirá la ley de momentos flectores salvo dos constantes, M_A y M_D.

La incógnita de trabajo va a ser la elección de mecanismo de colapso. Vamos a estudiar los dos más probables, que constan de tres rótulas plásticas (número necesario para reducir el hiperestatismo de grado 2 a mecanismo), que son la combinación de rótulas en los puntos A, B y D, y la combinación A, C y D, dibujados en las Fig. 2.14-a y Fig. 2.14-b.

Al imponer la condición de mecanismo según el primer modo de colapso (a) $M_A = M_B = M_D = 78$ (que la ley de momentos valga el momento plástico en las tres rótulas), se obtiene que $96\lambda = 2M_p = 156$kNm, con lo que $\lambda = 1{,}625$. Si repetimos el procedimiento con el segundo modo de colapso (b) $M_A = M_C = M_D = 78$, en este caso $\lambda = 1{,}5$, que resulta ser el mínimo y por tanto el mecanismo correcto.

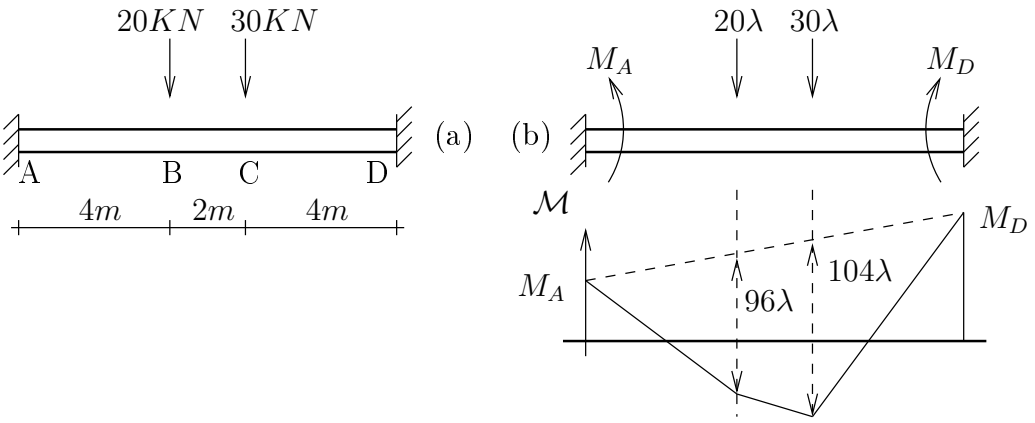


Figura 2.13: Ejemplo de aplicación del teorema del mínimo.

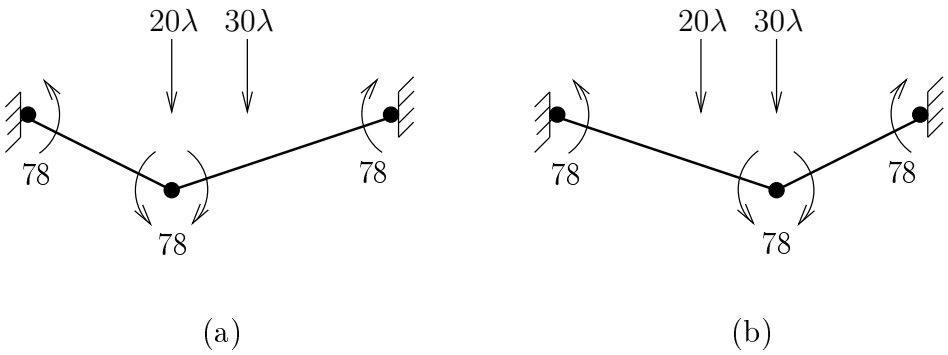


Figura 2.14: Dos modos de colapso.

2.3.3. Teorema del máximo

Una condición de equilibrio arbitraria que satisfaga la condición de plastificación proporcionará una estimación de la carga de colapso menor o igual a la correcta.

Esto significa que encontrar un estado que satisfaga las condiciones de **equilibrio** y **plastificación** pero sin asegurarse de la de mecanismo nos deja del lado de la seguridad.

La metodología que proporciona este teorema se ilustra sobre el mismo ejemplo anterior. El caso descrito por el modo de colapso en las rótulas A, B y D genera una ley de momentos que en el punto C tiene un valor de $-M_p + 104\lambda$ tomando el valor absoluto, y puesto que en ese caso $96\lambda = 2M_p$, resulta que el momento vale $13/12M_p$, que es superior a M_p y por tanto no

se cumple el criterio de plastificación, y por tanto el teorema del máximo. Un caso en el que sí que se cumpliría sería aquel en el que la ley de momentos se definiera por $M_A = 0$, $M_D = 0$, $M_C = M_p$, con lo que $104\lambda = M_p$ y $\lambda = 0{,}75$. Este caso cumple con los criterios de equilibrio y de plastificación, lo que nos permite asegurar que $0{,}75 \leq \lambda_c$.

Vamos a definir como incógnitas de trabajo los esfuerzos que definen el estado de equilibrio, M_A y M_D, como se indica en la Fig. 2.13. Para que se cumpla el criterio de plastificación a la vez que haya tres rótulas pl ásticas, no hay más alternativa que imponer que en los tres extremos de la ley de flectores éstos alcancen el momento plástico, $M_A = M_C = M_D = M_p$. Por tanto, $104\lambda = 2M_p = 156$kNm, con lo que $\lambda_c = 1{,}5$, y la ley de fuerzas y esfuerzos en colapso queda resumida en la Fig. 2.15.

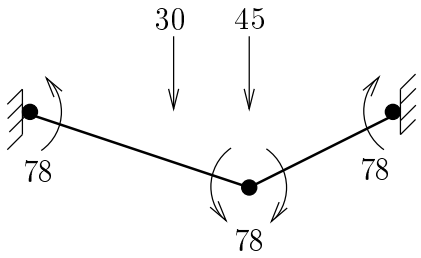


Figura 2.15: Ejemplo de aplicación del teorema del máximo.

Hemos visto que cualquier otra combinación que cumpla la condición de plastificación, por ejemplo la anteriormente descrita, $M_A = M_D = 0, \quad M_D = M_p$ generará un factor de carga menor.

2.3.4. Teorema de unicidad

El valor de la carga de colapso que satisface simultáneamente las tres condiciones de equilibrio, mecanismo y plastificación es único.

$$\lambda = \lambda_c \quad \text{(Unicidad)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Mecanismo} & \lambda \geq \lambda_c \quad \text{(Mínimo)} \\ \left.\begin{array}{l}\text{Equilibrio} \\ \text{Plastificación}\end{array}\right\} & \lambda \leq \lambda_c \quad \text{(Máximo)} \end{array} \right.$$

2.4. Calculo plástico de barras continuas

Comenzamos estudiando un caso muy útil, que es el de una viga continua de un número indefinido de vanos apoyados equidistantes y uniformemente cargada con q de la Fig. 2.16-a. Utilizaremos el teorema del mínimo.

Dado que la formación de rótulas plásticas en cada apoyo destruye la compatibilidad entre un vano y otro, cada uno de estos se comporta idénticamente a los demás, con lo que sólo es necesario calcular el caso de un vano interior cualquiera y uno extremo. Otra consecuencia de esto es que el cálculo plástico simple es independiente de asentamientos, efectos térmicos o defectos de montaje.

El único mecanismo de colapso de un vano interior es obvio, como se describe en la Fig. 2.16-b. Por el diagrama de equilibrio de esfuerzos Fig. 2.16-c se observa que $M_p = \frac{\lambda q L^2}{16}$ o bien $\lambda = \frac{16 M_p}{q L^2}$.

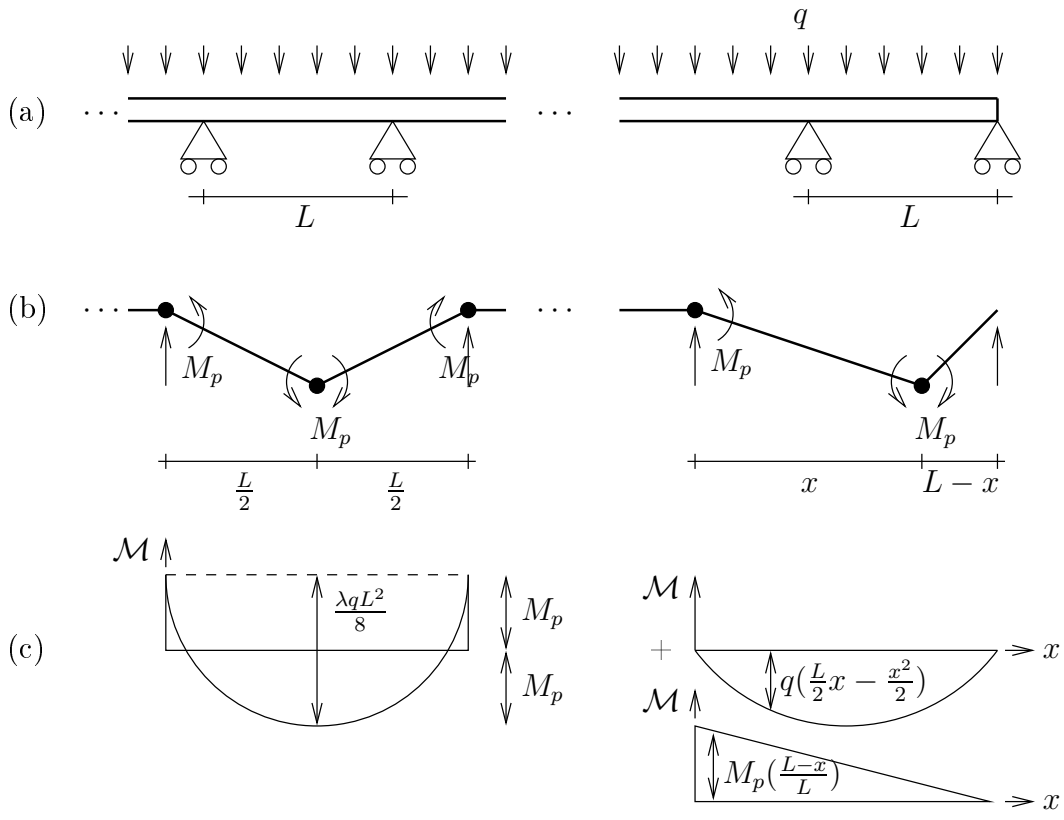


Figura 2.16: a) Ejemplo de viga continua. b) Mecanismos de colapso en un vano interior y extremo. c) Leyes de momentos flectores obtenidas a partir del equilibrio.

El vano extremo tiene infinitos mecanismos de colapso posibles puesto que no concemos la posición exacta x donde se formará la rótula. Aplicando el teorema del mínimo, tendremos que minimizar $\lambda(x)$. El diagrama de equilibrio nos proporciona que $\mathcal{M}(x) = \frac{1}{2}\lambda q x(L-x) - \frac{M_p}{L}(L-x)$. Si

lo igualamos al plástico para generar la segunda rótula $M_p = \mathcal{M}(x)$ queda $M_p(2L - x) = \frac{1}{2}\lambda qLx(L - x)$ y podemos despejar $\lambda(x) = \frac{2M_p(2L-x)}{qLx(L-x)}$. El valor óptimo de x es el que se despeja de la minimización $\frac{d\lambda(x)}{x} = 0$, $x = L(2 - \sqrt{2}) = 0{,}586L$, con lo que $\lambda = 11{,}66\frac{M_p}{qL^2}$.

De aquí se deduce que el vano extremo sufre un momento $M_p = \frac{\lambda qL^2}{11{,}66}$ muy superior al del vano interior $M_p = \frac{\lambda qL^2}{16}$, lo cual sugiere varias alternativas:

1. En primer lugar se deduce que una viga continua economiza más que una secuencia de vigas continuas de dos vanos.

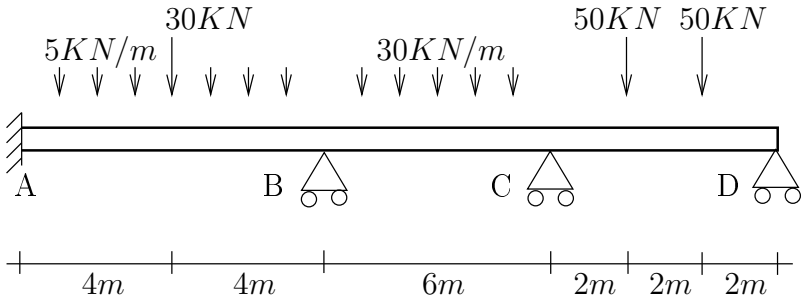
2. Si los problemas de flecha en estado límite de servicio son grandes, se puede asumir que los vanos internos queden sobredimensionados.

3. Engrosar la sección de los vanos extremos. Ha de tenerse cuidado de que el engrosamiento no se situe sobre el apoyo sino en el punto de contraflexión.

4. Reducir la luz de los vanos extremos en proporción $\sqrt{\frac{16}{11{,}66}} = 1{,}17$, relación obtenida imponiendo que en ambos tipos de vanos se conserve M_p y λ, y despejando las relaciones entre L, que se suponen distintas en cada tipo.

Práctica 1

La viga continua ABCD de la figura tiene una seción uniforme. Si el colapso se produce para las cargas indicadas, indíquese el valor del momento plástico.



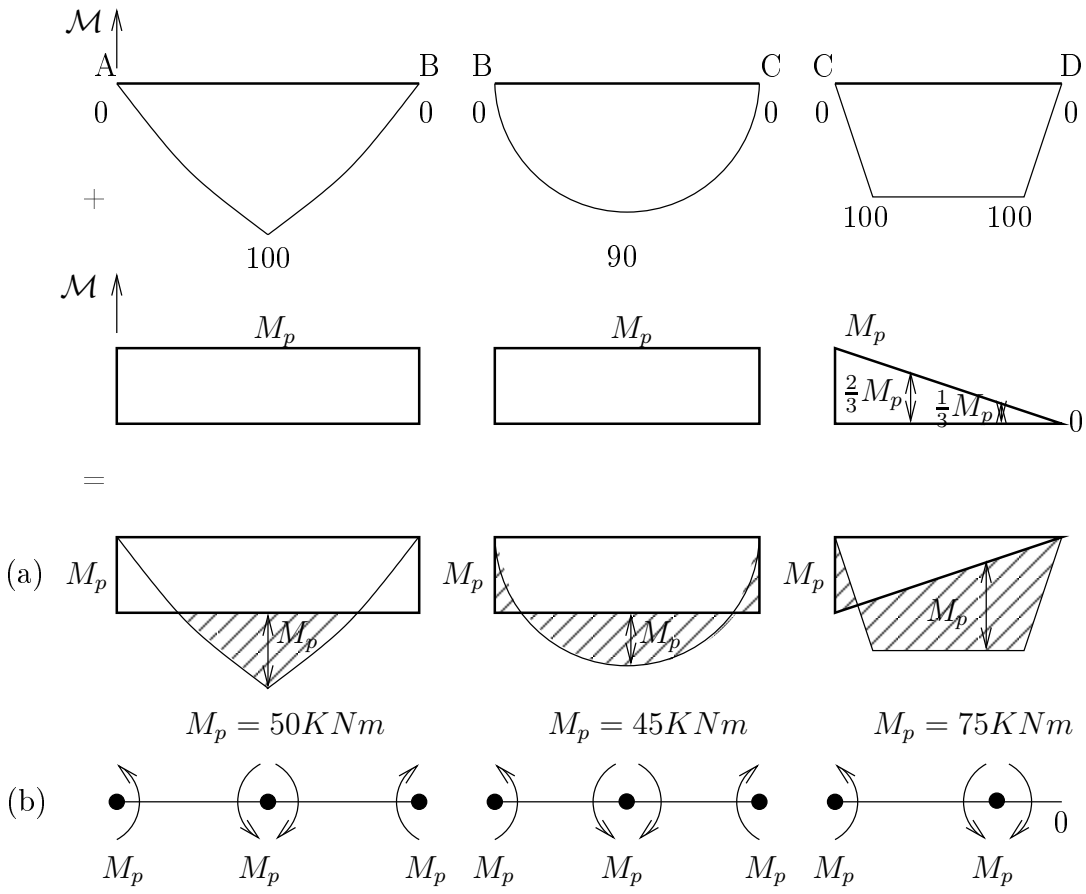
Solución 1

Comenzamos estudiando independientemente cada vano.

En cada uno establecemos dónde se situan las rótulas plásticas, como se in dica en la figura (b), y después calculamos las leyes de momentos flectores que satisfacen el equilibrio, superponiendo los efectos de las cargas externas (asumiendo que cada vano se encuentra libre del resto de la viga y biapoyado), y los efectos de los momentos plásticos en las rótulas.

Para cada estado se deduce cuál es el valor del momento plástico que cumple con el criterio de mecanismo. Dado que el momento plástico es único para toda la viga, plastifica el vano que tenga mayor momento flector dadas las cargas, y ese resulta ser el tercero. El momento plástico es $M_p = 75$kNm.

Obsérvese que en el dibujo se ha proporcionado una construcción muy útil para cálculo plástico, y es la distinción entre diagramas de momentos libre (superior) y de momentos de reacciones (intermedio). La superposición de ambos se puede hacer de modo directo, obteniendo como suma el área rallada (inferior) en lugar de calcular el diagrama referido al eje de abscisas. Esto se denomina diagrama reactante, y simplifica el establecimiento del equilibrio.


$\mathcal{M}$
A
B
C
D
0
100
90
100
M_p
$\frac{2}{3}M_p$
$\frac{1}{3}M_p$
(a)
(b)
$M_p = 50KNm$
$M_p = 45KNm$
$M_p = 75KNm$

Capítulo 3

Principio de los Trabajos Virtuales

Índice

3.1. Enunciado

3.1.1. Pórtico plástico

3.1.2. Demostración

3.2. Uso del PTV para determinación de leyes de momentos y deformadas

3.1. Enunciado

En su forma general, el principio de los trabajos virtuales expresa que *si un cuerpo sometido a un estado de equilibrio se asocia a otro estado de deformaciones, el trabajo virtual producto de ambos es nulo, pues se compensa la componente producida por las acciones y desplazamientos externos, con la componente debida a los esfuerzos y deformaciones internos.*

Para que se cumpla, es condición necesaria y suficiente que el estado de deformaciones y desplazamientos sea compatible, en el sentido de que las deformaciones internas sean solidarias con los desplazamientos externos. Sin embargo no es necesario que se correspondan con las fuerzas y esfuerzos, ni que exista ninguna ley de comportamiento particular. Además es necesario que el sistema de fuerzas y esfuerzos esté en equilibrio.

En el caso de que la estructura sea hiperestática, al no requerirse en el estado de fuerzas y esfuerzos la compatibilidad, existirán infinitas soluciones en equilibrio, y cualquiera de ellas es válida y genera los mismos resultados.

3.1.1. Pórtico plástico

Para particularizar al caso del cálculo plástico, sólo se va a tener en cuenta el caso de estructuras de nudos rígidos bajo la situación de mecanismo generado por las rótulas plásticas, donde las deformaciones elásticas son despreciables.

El estado de desplazamientos (magnitudes vectoriales $\boldsymbol{\delta}_i$ que incluyen desplazamientos y giros) y deformaciones (giros en las rótulas θ_j) de un pórtico en situación de mecanismo se define por el conjunto $(\boldsymbol{\delta}_i, \theta_j)$, que ha de ser compatible.

Recíprocamente, el estado de fuerzas (magnitudes vectoriales $\mathbf{F}_i$ que incluyen fuerzas y momentos) y esfuerzos (valores de la ley de momentos en las rótulas $\mathcal{M}_j$) viene definido por $(\mathbf{F}_i, \mathcal{M}_j)$, que tiene que estar en equilibrio.

La ecuación del Principio de los Trabajos Virtuales tomando como estado virtual el de desplazamientos y deformaciones genera una ecuación de equilibrio de expresión,

$$\sum_{i=1}^{n} \{H_i u_i^* + V_i v_i^* + M_i \theta_i^*\} = \sum_{j=1}^{r} \mathcal{M}_j \theta_j^*$$

Recíprocamente, tomando como estado virtual el de fuerzas y esfuerzos, la expresión del Principio de los Trabajos Virtuales proporciona una ecuación de compatibilidad,

$$\sum_{i=1}^{n} \{H_i^* u_i + V_i^* v_i + M_i^* \theta_i\} = \sum_{j=1}^{r} \mathcal{M}_j^* \theta_j$$

3.1.2. Demostración

Se deducirá en primer lugar el principio de los trabajos virtuales para un punto y para una barra, y posteriormente se generalizará a una estructura completa, compuesta por una suma de n nudos y b barras.

Principio de los Trabajos Virtuales de un punto material

Sea un punto material i en el espacio, sometido a un conjunto de f fuerzas y momentos tales que el punto está en equilibrio,

$$\{\mathbf{F}_{i1}, \mathbf{F}_{i2}, \ldots, \mathbf{F}_{if}; M_{i1}, M_{i2}, \ldots, M_{if}\}$$

Sea a continuación un estado auxiliar, que se denomina *estado virtual* y que se denotará con un asterisco de superíndice, que consiste en un posible desplazamiento y giro del punto, $\{\boldsymbol{\delta}^*; \theta^*\}$.

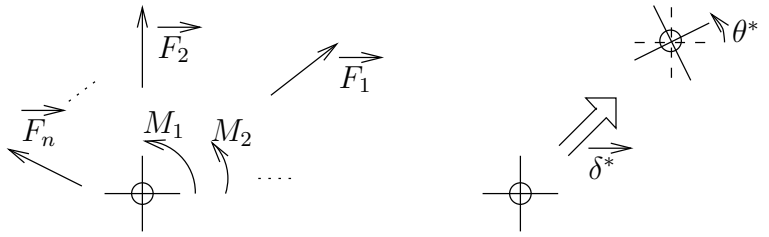


Figura 3.1: Estado real de fuerzas en equilibrio (izquierda) y estado virtual de desplazamientos (derecha).

El trabajo que las fuerzas aplicadas harían si se desplazaran esa cantidad es el producto escalar de las fuerzas y momentos por desplazamientos y giros respectivamente. Éste se denomina *trabajo virtual*, δw, pues tiene dimensiones de trabajo, pero no es real, y se puede desarrollar como:

$$\delta w = \sum_{k=1}^{f} (\mathbf{F}_{ik} \cdot \boldsymbol{\delta}^* + M_{ik} \cdot \theta^*) = \\ F_{i1}\delta^* \cos\alpha_{i1} + F_{i2}\delta^* \cos\alpha_{i2} + \cdots + F_{if}\delta^* \cos\alpha_{if} + \\ M_{i1}\theta^* + M_{i2}\theta^* + \cdots + M_{if}\theta^*$$

Es elemental comprobar que dicho trabajo es nulo si para valores arbitrarios de $\boldsymbol{\delta}^*$ y θ^* las fuerzas están en equilibrio:

$$\begin{cases} F_{i1}\cos\alpha_{i1} + F_{i2}\cos\alpha_{i2} + \cdots + F_{in}\cos\alpha_{if} & = 0 \\ M_{i1} + M_{i2} + \cdots + M_{if} & = 0 \end{cases}$$

Por tanto, el Principio de los Trabajos Virtuales para un punto material establece que:

$$\{\mathbf{F}_{i1}, \mathbf{F}_{i2}, \ldots, \mathbf{F}_{if}; M_{i1}, M_{i2}, \ldots, M_{if}\} \text{ en equilibrio } \Leftrightarrow \forall\{\boldsymbol{\delta}^*; \theta^*\}\ \delta w = 0$$

Principio de los Trabajos Virtuales para una barra

Se define en primer lugar un estado real de fuerzas en equilibrio, dibujado en la figura 3.2.

Sobre la misma barra, se define un estado virtual de desplazamientos, denotado con un asterisco ($*$). El que un estado sea real y el otro virtual se puede intercambiar sin pérdida de generalidad.

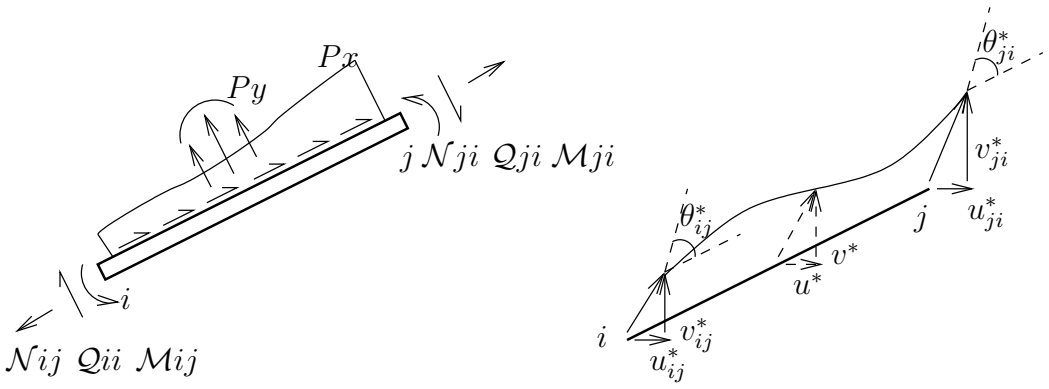


Figura 3.2: Estado real de fuerzas en equilibrio (izquierda) y estado virtual de desplazamientos (derecha) en una barra.

El estado virtual es compatible, es decir,

$$\begin{aligned} u^*(0) &= u^*_{ij} \qquad & u^*(L) &= u^*_{ji} \\ v^*(0) &= v^*_{ij} \qquad & v^*(L) &= v^*_{ji} \end{aligned}$$

así como $e^*(x) = \frac{du^*}{dx}$ y $\kappa^*(x) = \frac{d^2v^*}{dx^2}$.

En una barra el comportamiento longitudinal (que abarca los esfuerzos y fuerzas axiles y las componentes de desplazamientos y deformaciones longitudinales) está desacoplado del transversal (que abarca momentos flectores y cortantes, así como flecha transversal y giros). Esto permite calcular el PTV a comportamiento longitudinal sólo, después transversal y finalmente superponerlos.

Para la componente longitudinal la barra es biarticulada sometida a fuerzas longitudinales $p_x(x)$, que por tanto desarrolla sólo esfuerzos axiles $\mathcal{N}(x)$. El equilibrio en una rebanada diferencial de ancho dx conduce a la ecuación,

$$p(x) + \frac{d\mathcal{N}(x)}{dx} = 0$$

La componente longitudinal del estado virtual consiste en un posible desplazamiento longitudinal de cada sección de la barra, $u^*(x)$. Multiplicando la ecuación de equilibrio en la rebanada por una función arbitraria, para la que elegimos este desplazamiento virtual, se obtiene un trabajo virtual diferencial, que será nulo,

$$p_x(x)u^*(x) + \frac{d\mathcal{N}(x)}{dx}u^*(x) = 0$$

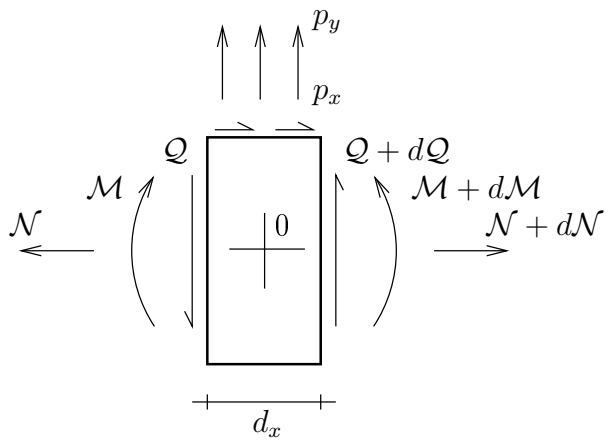


Figura 3.3: Equilibrio de una rebanada.

Integrando para toda la barra se obtiene:

$$\int_0^L p_x u^* dx + \int_0^L \frac{d\mathcal{N}}{dx} u^* dx = 0$$

Realizando una integración por partes en el segundo sumando se llega a:

$$\int_0^L p_x u^* dx + u^* \mathcal{N} \Big|_0^L - \int_0^L \mathcal{N} \frac{du^*}{dx} dx = 0$$

y reordenando,

$$u^*(L)\mathcal{N}(L) - u^*(0)\mathcal{N}(0) + \int_0^L p_x u^* dx = \int_0^L \mathcal{N} \frac{du^*}{dx} dx$$

Teniendo finalmente en cuenta que por equilibrio $\mathcal{N}(0) = \mathcal{N}_{ij}$ y $\mathcal{N}(L) = \mathcal{N}_{ji}$ y denominando al alargamiento virtual de la rebanada $e^* = du^*/dx$, se obtiene el Principio de los Trabajos Virtuales para una barra a axil,

$$\mathcal{N}_{ji} u^*_{ji} - \mathcal{N}_{ij} u^*_{ij} + \int_0^L p_x u^* \, dx = \int_0^L \mathcal{N} e^* \, dx$$

Para la componente transversal se procede de manera similar. Partiendo de las ecuaciones de equilibrio vertical y de momentos en la rebanada,

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{d\mathcal{Q}}{dx} + p_y = 0 & \dfrac{d\mathcal{M}}{dx} + Q = 0 \end{array}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2\mathcal{M}}{dx^2} - p_y = 0$$

y multiplicándolo por una función arbitraria, para la que tomamos un desplazamiento transversal virtual, e integrando a todo el elemento,

$$\int_0^L \frac{d^2\mathcal{M}}{dx^2} v^* \, dx - \int_0^L p_y v^* \, dx = 0$$

Integrando por partes dos veces en el primer término se obtiene finalmente,

$$-\mathcal{Q}_{ji} v^*_{ji} + \mathcal{Q}_{ij} v^*_{ij} + \mathcal{M}_{ji} \theta^*_{ji} + \mathcal{M}_{ij} \theta^*_{ij} + \int_0^L p_y(x) v^*(x) \, dx = \int_0^L \mathcal{M}(x) \kappa^*(x) \, dx$$

siendo $\kappa = \frac{d^2 v^*}{dx^2}$. Esta expresión implica que el trabajo interno del momento flector con la curvatura es igual al trabajo externo de las fuerzas que producen flexión con los desplazamientos y giros virtuales.

Las dos ecuaciones deducidas se cumplen de forma independiente, luego la suma de ambas también se cumplirá:

$$\begin{aligned} -\mathcal{N}_{ij} u^*_{ij} + \mathcal{Q}_{ij} v^*_{ij} + \mathcal{M}_{ij} \theta^*_{ij} + \mathcal{N}_{ji} u^*_{ji} - \mathcal{Q}_{ji} v^*_{ji} + \mathcal{M}_{ji} \theta^*_{ji} + \\ + \int_0^L (p_x u^* + p_y v^*) \, dx = \int_0^L (\mathcal{N} e^* + \mathcal{M} \kappa^*) \, dx \end{aligned}$$

Éste es el principio de los trabajos virtuales para barras planas. La ecuación anterior expresa que el trabajo de las fuerzas externas con los desplazamientos virtuales es igual al trabajo de los esfuerzos internas con las deformaciones virtuales.

Los dos miembros de la ecuación representan un trabajo virtual, el izquierdo el trabajo virtual de las fuerzas externas δw^{ext}, y el derecho el trabajo virtual interno δw^{int}, de modo que el principio podría resumirse en la ecuación,

$$\delta w^{\text{ext}} = \delta w^{\text{int}}$$

Principio de los Trabajos Virtuales para una estructura

A continuación se va a extender el teorema anterior a toda la estructura, para lo que no hay más que sumar los trabajos interno y externo descritos para todas las barras $k = 1..b$ y todos los nudos $i = 1..n$ simultáneamente.

$$\sum_{k=1}^{b} \delta w^{k,\text{ext}} + \sum_{i=1}^{n} \delta w^{i,\text{ext}} = \sum_{k=1}^{b} \delta w^{k,\text{int}} + \sum_{i=1}^{n} \delta w^{i,\text{int}}$$

En cuanto a cada nudo i, si distinguimos entre las fuerzas internas de cada barra que confluye al nudo $k \ni i$, cambiados de signo por la segunda ley de

Newton entre nudo y barra, y una resultante que las equilibra externamente, en dicho nudo se puede escribir el Principio de los Trabajos Virtuales como,

$$\delta w^{i,\text{ext}} = H_i u_i^* + V_i v_i^* + M_i \theta_i^* = \sum_{k \ni i} \left(\mathbf{F}_{ik} \cdot \boldsymbol{\delta}_i^* + M_{ik} \theta_i^* \right) = \delta w^{i,\text{int}}$$

Sustituyendo las expresiones del PTV de cada barra y nudo en la sumatoria queda:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{b} \left\{ -\mathcal{N}_{ij} u_{ij}^* + \mathcal{Q}_{ij} v_{ij}^* + \mathcal{M}_{ij} \theta_{ij}^* + \mathcal{N}_{ji} u_{ji}^* - \mathcal{Q}_{ji} v_{ji}^* + \mathcal{M}_{ji} \theta_{ji}^* \right\} + \\ &\quad \sum_{k=1}^{b} \int_0^L \left(p_x^k u^{k*} + p_y^k v^{k*} \right) dx + \sum_{i=1}^{n} \left(H_i u_i^* + V_i v_i^* + M_i \theta_i^* \right) = \\ &\quad \sum_{k=1}^{b} \int_0^L \left(\mathcal{N}^k e^{k*} + \mathcal{M}^k \kappa^{k*} \right) dx + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k \ni i} \left(\mathbf{F}_{ik} \cdot \boldsymbol{\delta}_i^* + M_{ik} \theta_i^* \right) \end{aligned}$$

Para transformar la expresión resultante en otra más útil comenzamos por sustituir la notación de las fuerzas por su versión vectorial, con cuidado de respetar los criterios de signos:

$$\begin{aligned} -\mathcal{N}_{ij} u_{ij}^* + \mathcal{Q}_{ij} v_{ij}^* &= \mathbf{F}_{ij} \cdot \boldsymbol{\delta}_{ij}^* \\ \mathcal{N}_{ji} u_{ji}^* - \mathcal{Q}_{ji} v_{ji}^* &= \mathbf{F}_{ji} \cdot \boldsymbol{\delta}_{ji}^* \end{aligned}$$

y por recordar que en un nudo la definición de desplazamiento o giro en un nudo es unívoca:

$$\begin{aligned} \theta_i^* = \theta_{ij}^* = \theta_{ik}^* = \theta_{il}^* = \dots \\ \boldsymbol{\delta}_i^* = \boldsymbol{\delta}_{ij}^* = \boldsymbol{\delta}_{ik}^* = \boldsymbol{\delta}_{il}^* = \dots \end{aligned}$$

A continuación se puede redefinir el sumatorio, en lugar de $k = 1..b$ descomponiéndolo en nudos $i = 1..n$ y en cada nudo a las barras que a él confluyen $k \ni i$. Así, el primer sumatorio se puede expresar como:

$$\sum_{k=1}^{b} \left\{ \mathbf{F}_{ij} \cdot \boldsymbol{\delta}_{ij}^* + \mathcal{M}_{ij} \theta_{ij}^* + \mathbf{F}_{ji} \cdot \boldsymbol{\delta}_{ji}^* + \mathcal{M}_{ji} \theta_{ji}^* \right\} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k \ni i} \left\{ \mathbf{F}_{ik} \cdot \boldsymbol{\delta}_i^* + \mathcal{M}_{ik} \theta_i^* \right\}$$

Sustituyendo esta expresión en la de partida se anulan el primer con el último sumando, y reordenando se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{n} \{H_i u_i^* + V_i v_i^* + M_i \theta_i^*\} + \sum_{k=1}^{b} \int_0^L (p_x^k u^{*k} + p_y^k v^{*k})\, dx = \sum_{k=1}^{b} \int_0^L (\mathcal{N}^k e^{*k} + \mathcal{M}^k \kappa^{*k})\, dx$$

expresión completa de Principio de los Trabajos Virtuales para estructuras de nudos rígidos planas.

Esta expresión implica que el trabajo de las fuerzas sobre los nudos y barras con los desplazamientos virtuales (miembro izquierdo) iguala al trabajo de los esfuerzos con la deformación virtual de las barras (miembro derecho).

De las hipótesis realizadas para la demostración se han de destacar las siguientes consecuencias:

- El sistema de fuerzas y esfuerzos $\mathbf{F} = (H_i, V_i, M_i, p_x^k, p_y^k; \mathcal{N}^k, \mathcal{M}^k, \mathcal{Q}^k)$ debe estar en equilibrio.
- El sistema $\boldsymbol{\delta}^* = (u_i^*, v_i^*, \theta_i^*, u^{*k}, v^{*k}; e^{*k}, \kappa^{*k})$ de desplazamientos y deformaciones virtuales ha de ser compatible.
- No se ha utilizado ninguna condición referente a la ley de comportamiento, con lo que el PTV es válido cualquiera que sea ésta.

De la reversibilidad en la elección de estado virtual y real se deducen dos formas de aplicar el PTV:

1. Si $\mathbf{F} \equiv$ real y $\boldsymbol{\delta}^* \equiv$ virtual $\Rightarrow$ el PTV es una ecuación de equilibrio.
2. Si $\mathbf{F} \equiv$ virtual y $\boldsymbol{\delta}^* \equiv$ real $\Rightarrow$ el PTV es una ecuación de compatibilidad.

La adecuada elección de los estados virtuales permitirá la obtención de las ecuaciones de equilibrio y/o compatibilidad necesarias en las aplicaciones.

Principio de los Trabajos Virtuales para cálculo plástico

En toda la demostración no se ha utilizado la ley de comportamiento, por lo que el Principio de los Trabajos Virtuales se cumple indiferentemente que ésta sea elástica o plástica.

Si estamos en el caso de un mecanismo de colapso, las deformaciones de tipo giro concentradas en las rótulas serán muy superiores a las deformaciones elásticas e y κ donde no hay rótulas. Por ello, la ley $\kappa(x)$ se podrán aproximar

por una función de valor nulo en todo punto x excepto en el punto de la rótula, donde tendrá el valor de su giro θ. La ley $e(x)$ será íntegramente despreciable frente a lo anterior. Por ello, la integral del trabajo interno se reducirá a la suma para las r rótulas de toda la estructura,

$$\sum_{k=1}^{b} \int_0^L (\mathcal{N}^k e^{*k} + \mathcal{M}^k \kappa^{*k})\, dx = \sum_{j=1}^{r} \mathcal{M}_j \theta_j^*$$

Si hacemos la hipótesis simplificatoria de que no existen fuerzas distribuidas $p_x = p_y = 0$, e introducimos la presencia de rótulas plásticas:

$$\sum_{i=1}^{n} \{H_i u_i^* + V_i v_i^* + M_i \theta_i^*\} = \sum_{j=1}^{r} \mathcal{M}_j \theta_j^*$$

Es necesario tener en cuenta que el trabajo absorbido por una rótula será siempre positivo, puesto que el momento que opone el giro siempre se dará en su misma dirección. Por ello, los sumandos del miembro derecto extendidos sobre rótulas con momento M_p, se pueden expresar en valores absolutos y olvidar el signo del giro.

3.2. Uso del PTV para determinación de leyes de momentos y deformadas

El Principio de los Trabajos Virtuales en su forma de ecuación de equilibrio, es decir, utilizando un estado real de fuerzas y esfuerzos con un estado virtual de deformaciones y desplazamientos compatible, genera una ecuación de equilibrio que puede proporcionar la ley de momentos. Recíprocamente, con un estado virtual de fuerzas y esfuerzos equilibrado, establece una ecuación de compatibilidad entre deformaciones y desplazemientos reales que permite calcular las rotaciones de la deformada.

Como ejemplo del segundo caso, vamos a calcular la relación elemental entre la deformada y la rotación de mecanismo en el nudo 2. Tomando el estado real deformado Fig. 3.4-a y definiendo un estado virtual como en Fig. 3.4-b, podemos definir,

$$P^* \delta = \mathcal{M}_2^* \theta_2 \qquad \Rightarrow \qquad \theta_2 = \frac{\delta}{H}$$

Como ejemplo del primer caso vamos a tratar de calcular la relación entre la carga aplicada P y el momento plástico M_p para un pórtico dado en su

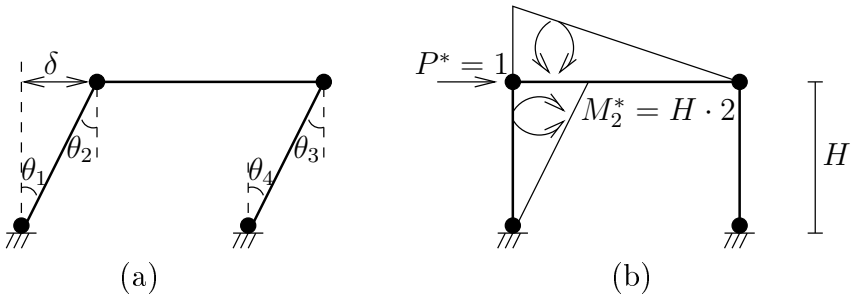


Figura 3.4: Estados real y virtual para el establecimiento de una ecuación de compatibilidad por el PTV.

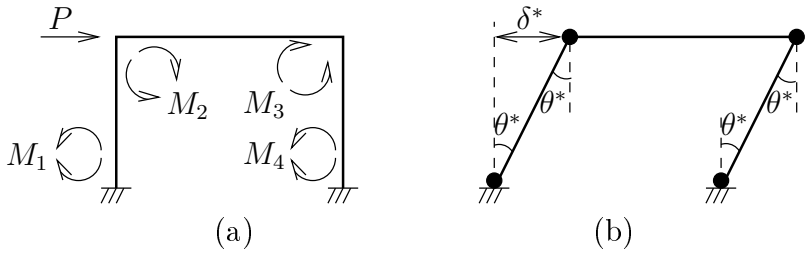


Figura 3.5: Estados para establecer con el PTV una ecuación de equilibrio.

mecanismo de colapso. Dado el estado real de esfuerzos de la Fig. 3.5-a y el virtual Fig. 3.5-b, se puede obtener la ecuación,

$$\left.\begin{array}{r} P\delta^* = PH\theta^* = \mathcal{M}_1\theta^* + \mathcal{M}_2\theta^* + \mathcal{M}_3\theta^* + \mathcal{M}_4\theta^* \\ \mathcal{M}_i = M_p \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{4M_p}{H}$$

Capítulo 4

Plasticidad en estructuras de barras

Índice

4.1. Combinación de mecanismos

4.1.1. Introducción

4.1.2. Descripción

4.1.3. Secciones críticas

4.1.4. Número de mecanismos independientes

4.2. Mecanismos de colapso

4.2.1. Mecanismo de cimbreo

4.2.2. Mecanismo de barra

4.2.3. Mecanismos combinados

4.2.4. Mecanismos completo, parcial y sobrecompleto

4.1. Combinación de mecanismos

4.1.1. Introducción

Cuando el cálculo plástico se extiende de barras a pórticos, el mecanismo de colapso deja de ser obvio, y normalmente es necesario tantear varias posibilidades. Estudiemos el procedimiento sobre un ejemplo sencillo como el de la Fig. 4.1. El procedimiento que seguiremos es el del teorema del mínimo, por el que estudiaremos todos los mecanismos que cumplan las condiciones de mecanismo ($\mathcal{M} = M_p$ en un número suficiente de rótulas) y de equilibrio,

que determinaremos utilizando el Principio de los Trabajos Virtuales . De todos ellos, el mecanismo que proporcione un factor de carga mínimo, será el que se produzca.

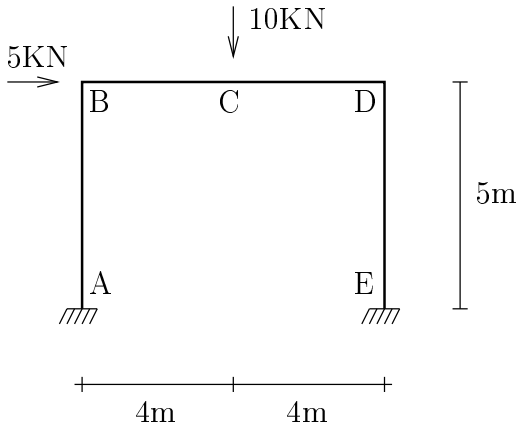


Figura 4.1: Ejemplo de pórtico sencillo. Calcúlese el factor de carga ante el colapso sabiendo que el momento plástico es de 20 kNm, así como la ley de momentos flectores.

4.1.2. Descripción

El procedimiento a seguir para calcular plásticamente una estructura se basa en los teoremas del mínimo y del máximo en combinación con el Principio de los Trabajos Virtuales .

La secuencia consistirá en comenzar describiendo todos los mecanismos independientes y calcular para cada uno de ellos su factor de carga, utilizando el Principio de los Trabajos Virtuales como ecuación de equilibrio. El teorema del mínimo dice que, puesto que estas estimaciones cumplen con el equilibrio, las predicciones estarán del lado de la seguridad.

Aunque estudiemos todos los mecanismos independientes, es posible que el mecanismo para el cual el factor de carga sea el mínimo absoluto, no sea uno de los estudiados, sino una combinación de ellos. Para realizar las comprobaciones de equilibrio sobre dichas combinaciones, el Principio de los Trabajos Virtuales proporciona una técnica sencilla, pues no hace falta más que combinar las ecuaciones del Principio de los Trabajos Virtuales de equilibrio otbenidas anteriormente sumándolas, ponderadas de modo que se anulen los giros en algunos nudos (puesto que éstos serán los casos más desfavorables, o los mecanismos más probables).

Por último se aplica el teorema del máximo, que consistirá en calcular la ley de momentos completa para el mecanismo seleccionado y comprobar que en ningún punto se sobrepase el momento plástico. Si ésto es así, nos habremos asegurado de que dicho mecanismo es el que se producirá en la realidad.

4.1.3. Secciones críticas

En primer lugar sabemos que los únicos puntos de la estructura donde se pueden formar rótulas plásticas son los A, B, C, D y E, donde hay cambios de pendiente o valores extremos en la ley de momentos flectores. En el caso de que no haya cargas distribuidas, las leyes de momentos se compondrán de segmentos rectos, con lo que los extremos sólo pueden aparecer en los puntos de aplicación de cargas o en los extremos de las barras, mientras que si hay cargas distribuidas, a estas posibles secciones críticas hay que añadir los puntos donde las leyes de flectores presenten extremos. Recuérdese cómo estos casos se dan en el ejemplo dedicado a barras.

4.1.4. Número de mecanismos independientes

El número de mecanismos independientes es igual al número de ecuaciones de equilibrio que se pueden plantear independientemente, y será igual al número de secciones críticas o extremos locales de la ley de momentos menos el grado de hiperestatismo,

$$\text{N}^o \text{ mecanismos independientes} = \text{Secciones críticas} - \text{GHT}$$

Las secciones críticas o extremos en la ley de flectores se pueden producir en los lugares donde hay cargas puntuales, en los vientres de las leyes curvas, y en los extremos de cada barra.

El grado de hiperestatismo total (GHT) de una estructura de nudos rígidos se puede calcular por el método del árbol, que consiste en contar cuántos cortes hay que hacer en la estructura para que no aparezcan bucles cerrados. El grado de hiperestatismo será igual al número de estos cortes multiplicado por tres. Posteriormente se reducirá según las rótulas y apoyos no empotrados.

El número de mecanismos independientes coincide con el número de ecuaciones de equilibrio independientes que se pueden plantear, con objeto de determinar las leyes de esfuerzos.

Nótese que hay casos particulares en los que esta fórmula puede dar lugar a confusión. Hay estructuras cuyo grado de traslacionalidad no se obtiene

correctamente con la fórmula $GT = 2n - b - r_L$, dando un número negativo debido a que se está teniendo en cuenta demasiadas veces el criterio de inextensibilidad de barras, con lo cual hay que corregir el NMI aumentándola en este número. Estudiese el caso de una viga biempotrada con una carga en el centro, que tendrá un $NMI = 1$ real, o el caso de una T con sus tres extremos empotrados y cargas puntuales en medio de las tres barras, que tiene un $NMI = 4$ real. Considérese que estas estructuras son exactamente las mismas si se sustituye uno de los empotramientos horizontales por una deslizadera horizontal, con lo cual la fórmula anterior sí que proporcionará el NMI real.

4.2. Mecanismos de colapso

Sobre el ejemplo de la Fig. 4.1 veremos cuáles son los mecanismos que se producen. No pretenden ser una exposición generalizada, sino una muestra de los más usuales.

4.2.1. Mecanismo de cimbreo

En este movimiento, descrito en la Fig. 4.2, dado que asumimos la hipótesis de pequeños desplazamientos, la viga superior se desplaza como sólido rígido lateralmente, sin sufrir ningún descenso la carga vertical.

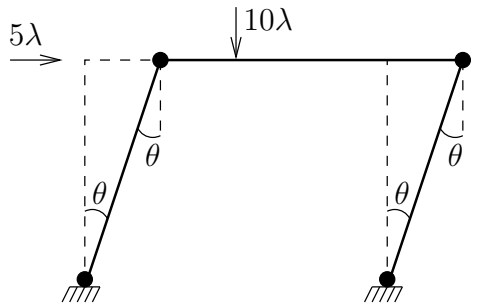


Figura 4.2: Mecanismo de cimbreo (a).

El Principio de los Trabajos Virtuales nos proporciona:

$$5\lambda \cdot 5\theta = 20 \cdot (\theta + \theta + \theta + \theta) \Rightarrow \lambda = 3{,}2$$

Nótese que en mecanismos de colapso, el momento en la rótula plástica siempre se produce en la dirección de giro de dicha rótula, resultando que las rótulas plásticas siempre dan trabajos virtuales positivos.

4.2.2. Mecanismo de barra

En pequeños desplazamientos virtuales los puntos B y D no se acercan ni alejan (Fig. 4.3), con lo que los puntales no flectan y la carga horizontal no observa desplazamiento:

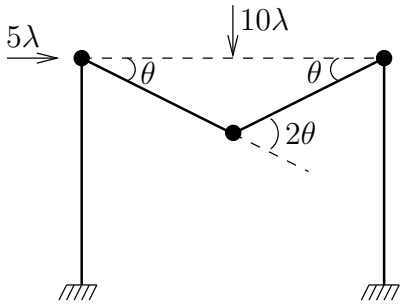


Figura 4.3: Mecanismo de barra (b).

$$10\lambda \cdot 4\theta = 20 \cdot (\theta + 2\theta + \theta) \Rightarrow \lambda = 2$$

4.2.3. Mecanismos combinados

El número de mecanismos independientes para la estructura del ejemplo es de dos, que es la diferencia de cinco secciones críticas $(A - E)$ menos tres grados de hiperestatismo. Esto significa que los mecanismos que se han identificado hasta aquí son los dos independientes. Pero en general hay infinitos mecanismos de colapso posibles, que serán combinaciones lineales de los anteriores, y no sabemos cuál es el crítico. Sin embargo no es necesario comprobar los infinitos mecanismos, sino sólo aquellos en los que el número de rótulas que se forman sea el mínimo necesario para que se produzca el colapso.

Con el objeto de que todo mecanismo tenga un sólo grado de libertad θ, es necesario que el movimiento obtenido en la Fig. 4.4 por combinación de los anteriores no forme rótula en el punto B o D. En el primer caso se obtiene el mecanismo (c) como $(c) = (a) + (b)$. En el segundo se obtiene el mecanismo $(d) = (a) - (b)$.

Dado que el mecanismo (d) se mueve de un modo antinatural considerando las fuerzas, podemos intuir que su factor de carga será excesivamente alto, por lo que no consideraremos este caso y nos quedaremos con el mecanismo (c):

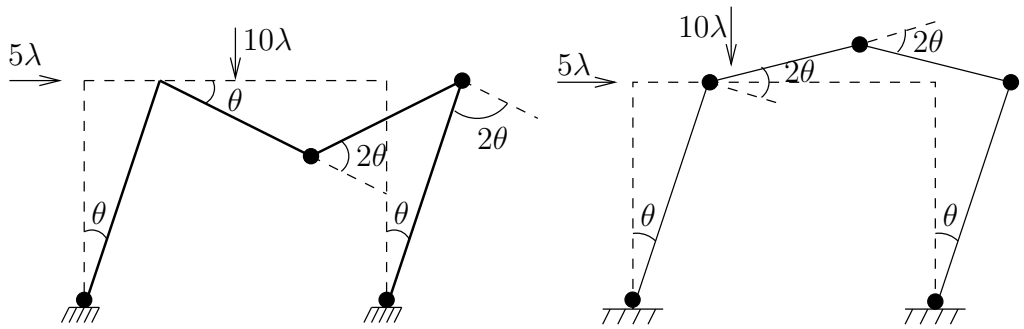


Figura 4.4: Mecanismos combinados (c) (izquierda) y (d) (derecha).

$$5\lambda \cdot 5\theta + 10\lambda \cdot 4\theta = 20 \cdot (\theta + 2\theta + 2\theta + \theta) \Rightarrow \lambda = 1{,}846$$

Por el teorema del mínimo, habiendo estudiado todos los mecanismos probables, se deduce que éste último (c) será el real (crítico). La ley de momentos flectores se compone de los tramos rectos descritos en la Fig. 4.5 entre los que queda por determinar $\mathcal{M}_B$. El modo más rápido de despejar esta incógnita es mediante el Principio de los Trabajos Virtuales haciendo uso de un estado virtual como el indicado, donde se ha introducido una rótula ficticia en B:

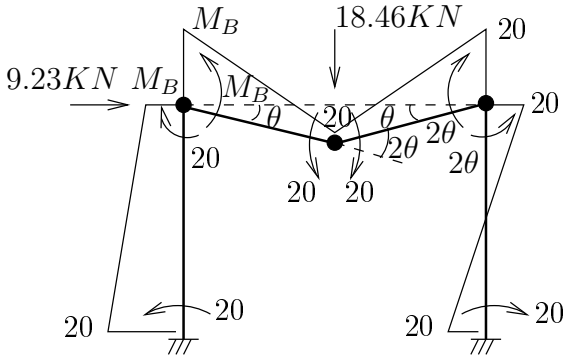


Figura 4.5: Diagrama de momentos flectores y estado virtual auxiliar para su determinación con el Principio de los Trabajos Virtuales.

$$18{,}46 \cdot 4\theta = \mathcal{M}_B \cdot \theta + 20 \cdot (2\theta + \theta) \Rightarrow \mathcal{M}_B = 13{,}85$$

4.2.4. Mecanismos completo, parcial y sobrecompleto

Para saber cuántos mecanismos combinados hay que estudiar, es necesario conocer los posibles números de rótulas que provocan el colapso de una estructura. El total de los mecanismos de colapso se puede clasificar en tres tipos, atendiendo al número de rótulas plásticas que intervienen en ellos:

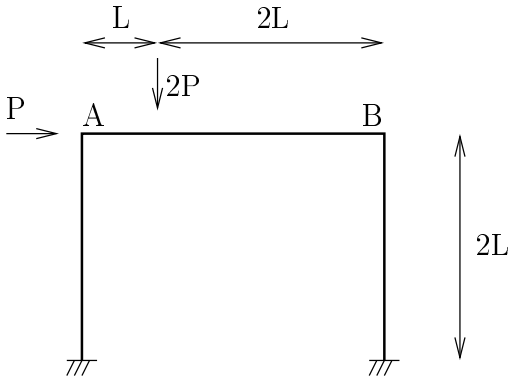
- Se denomina mecanismo de colapso **completo** al que genera un estado de equilibrio estáticamente determinado y contiene una rótula más que el grado de hiperestatismo de la estructura. Éste es el caso de los mecanismos de cimbreo y combinado del ejemplo anterior.
- Un mecanismo de colapso es **sobrecompleto** si se forman más rótulas plásticas que las necesarias para el colapso. Un caso así tiene más de un grado de libertad y no se debe analizar, puesto que será el resultado de varios mecanismos simultáneos que han de ser analizados independientemente.
- Un mecanismo de colapso es **parcial** si se forman menos rótulas plásticas que las necesarias para el colapso completo. Éste es el caso del mecanismo de barra en el ejemplo anterior.

Es evidente que en el caso particular de que una estructura sea isostática, la aparición de una sola rótula determina el colapso completo.

Cuando un pórtico sufre colapso parcial, la ley de esfuerzos flectores no es única. Aún así, se satisface el teorema de unicidad.

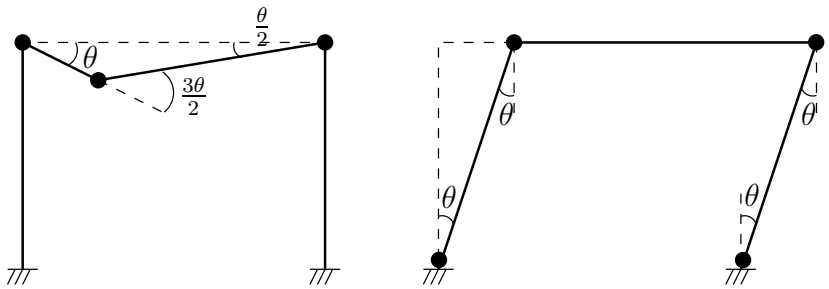
Práctica 2

Veamos sobre el ejemplo siguiente la aplicación de la combinación de mecanismos para conocer la carga de colapso.



Solución 2

El número de mecanismos independientes se deduce a partir del conocimiento de que la ley de momentos tiene 5 extremos, y el grado de hiperestatismo de la estructura es 3, con lo que existen 2 mecanismos independientes. Se pueden definir los dados en la figura.



(a) (b)

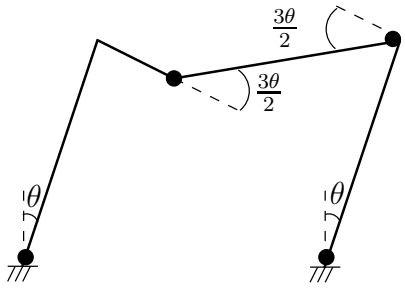
Aplicando el Principio de los Trabajos Virtuales a cada uno de los casos se obtiene el valor de P que origina el mecanismo. Para el mecanismo (a),

$$M_p\left(\theta+\frac{3}{2}\theta+\frac{1}{2}\theta\right)=2PL\theta \quad \Rightarrow \quad P^a=\frac{3M_p}{2L}$$

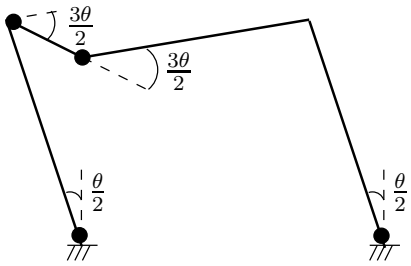
mientras que para el mecanismo (b),

$$M_p\,(4\theta) = 2PL\theta \quad \Rightarrow \quad P^b = \frac{2M_p}{L}$$

Si no hubiera más mecanismos posibles, la carga de colapso sería P^a, pero se pueden imaginar como posibles mecanismos las combinaciones de ambos tales que A no plastifique o B no lo haga.



(c)



(d)

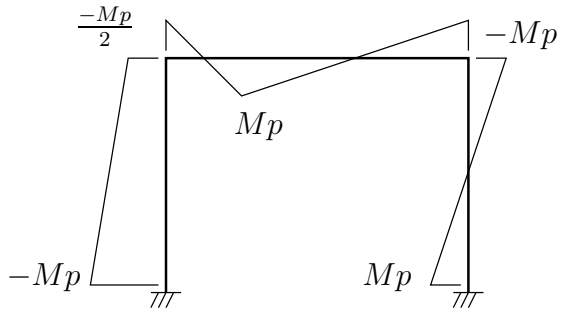
La carga de colapso del primer caso se puede obtener sumando la primera ecuación de equilibrio a la segunda, con cuidado de compensar los signos, con lo que los giros de la rótula A se anulan,

$$M_p\left(\theta + \frac{3}{2}\theta + \frac{3}{2}\theta + \theta\right) = 2PL\theta + 2PL\theta \quad \Rightarrow \quad P^c = \frac{5M_p}{4L}$$

y la segunda combinación consiste en restarle a la primera la segunda multiplicada por 1/2, con objeto de que los giros en B se anulen,

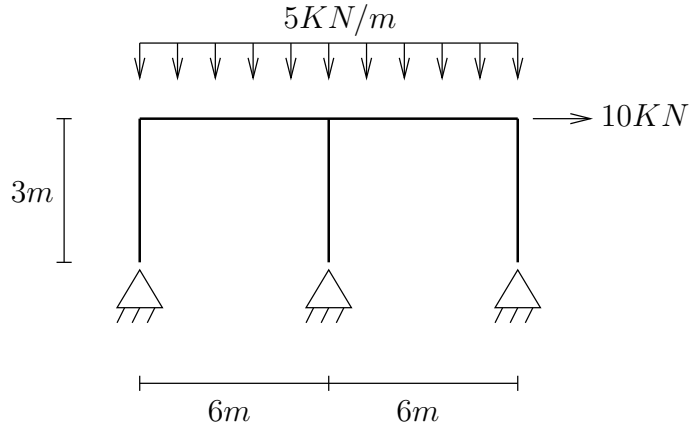
$$M_p\left(\frac{1}{2}\theta + \frac{3}{2}\theta + \frac{3}{2}\theta + \frac{1}{2}\theta\right) = 2PL\theta - PL\theta \quad \Rightarrow \quad P^d = \frac{4M_p}{L}$$

Se deduce que el mecanismo crítico es el (c), con una carga mínima de colapso de $P = \frac{5M_p}{4L}$. Para comprobar que no hemos olvidado ningún mecanismo calcularemos la ley de momentos y comprobaremos que en ningún punto se excede el momento plástico.



Práctica 3

Calculemos el factor de carga ante colapso para el pórtico de la figura, cuyos pilares tienen un momento plástico de 20 kNm y las vigas 36 kNm.

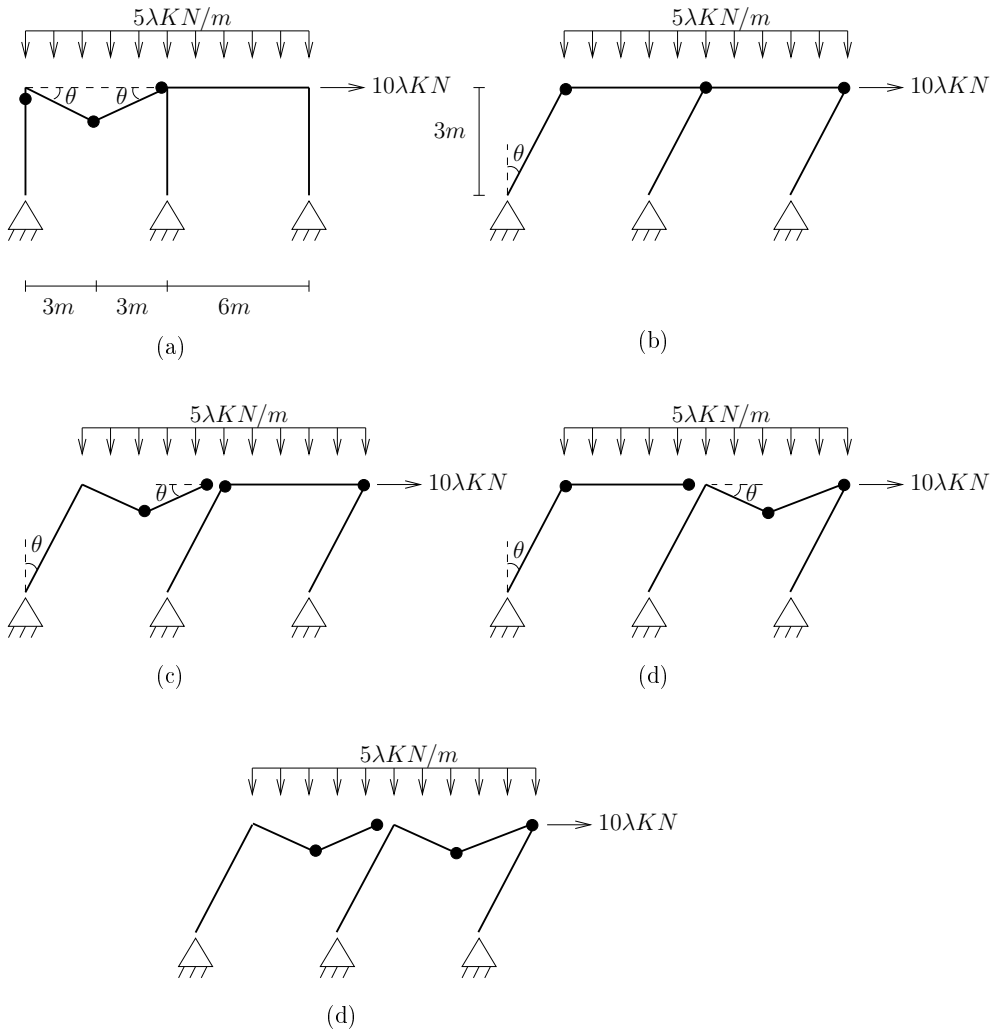


Solución 3

Este caso tiene la peculiaridad de que la carga no está en los nudos sino distribuida, con lo cual no sabemos a priori en qué puntos exactamente se producirán las rótulas plásticas. Puesto que tenemos varios vanos, es demasiado complicado trabajar con leyes exactas, por lo que se procederá por tanteos a acotar sus valores. El único método práctico para refinar este valor, una vez acotado, es el uso de programas de cálculo que usen la teoría elasto-plástica, capaces de hacer muchas más operaciones que nosotros.

En primer lugar asumiremos que las rótulas plásticas de los vanos se van a formar en sus puntos centrales. De este modo, los mecanismos razonables

son los descritos en las figuras.



Para plantear el problema recurriremos al teorema del mínimo, en el cual tenemos que estudiar todos los mecanismos de colapso probables, plantear la condición de mecanismo y despejar para cada uno el factor de carga.

El número de mecanismos independientes se deduce a partir del conocimiento de que la ley de momentos tiene 7 extremos (5 alrededor de nudos, y 2 en los máximos de las parábolas), y el grado de hiperestatismo de la estructura es 3, con lo que existen 4 mecanismos independientes. Se pueden definir los dados en las siguientes cinco figuras (se ha omitido el relacionado con el nudo central, definido por tres rótulas plásticas alrededor de las tres barras que a él convergen, y que no viene excitado). Antes de continuar, cuando una

rótula plástica se forma en la unión de dos barras de distinta capacidad, se producirá en el extremo de aquella que sea más debil. En el caso de que sean tres las barras convergentes, puede producirse en cualquiera de ellas: aquella en la que el momento flector antes alcance el plástico asociado a esa barra.

Mecanismo de barra (a) La aplicación del PTV para el establecimiento de ecuaciones de equilibrio requiere de su versión para fuerzas distribuidas,

$$\sum_{i=1}^{n} \{H_i u_i^* + V_i v_i^* + M_i \theta_i^*\} + \sum_{k=1}^{b} \int_0^L (p_x^k u^{*k} + p_y^k v^{*k})\, dx = \sum_{j=1}^{r} \mathcal{M}_j \theta_j^*$$

donde la ley de desplazamientos v^{*k} es una función compuesta de segmentos definida a partir de θ. Por tanto el primer término no nulo de trabajo virtual externo proviene de la integral del esfuerzo constante (5λ, que se saca de la integral por constante), multiplicada por la integral de la ley triangular de desplazamientos (de base 6m y altura 3θ, dando un área de 9θm).

$$5\lambda \cdot 9\theta = 20\theta + 36 \cdot 3\theta \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = 2{,}844$$

Mecanismo de cimbreo (b)

$$10\lambda \cdot 3\theta = 20 \cdot 3\theta \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = 2{,}0$$

Mecanismo combinado (c)

$$5\lambda \cdot 9\theta + 10\lambda \cdot 3\theta = 20 \cdot 2\theta + 36 \cdot 3\theta \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = 1{,}973$$

Mecanismo combinado (d)

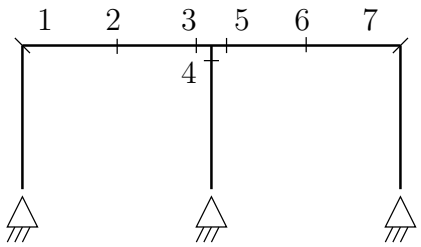
$$5\lambda \cdot 9\theta + 10\lambda \cdot 3\theta = 20 \cdot 3\theta + 36 \cdot 3\theta \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = 2{,}240$$

Mecanismo combinado (e)

$$2 \cdot 5\lambda \cdot 9\theta + 10\lambda \cdot 3\theta = 20 \cdot 2\theta + 36 \cdot 6\theta \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = 2{,}133$$

De esto se deduce que el mecanismo combinado (c) es el crítico, con un factor de carga frente a colapso de 1.973. Se producen cuatro rótulas plásticas, lo que suma uno más que el grado de hiperestatismo, que es tres.

El segundo paso para completar este problema es aplicar el teorema del máximo, en el que estableciendo las condiciones de equilibrio y plastificación sobre la estimación anterior acotaremos inferiormente el factor de carga. Para

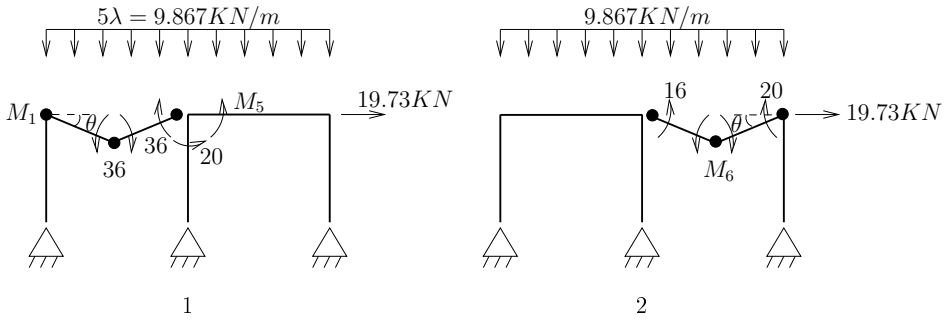


Secciones críticas

establecer la plastificación se procederá a calcular el diagrama de momentos flectores mediante ecuaciones de equilibrio, y acotarlo en las secciones críticas 1 a 7. Para calcular esos siete valores, siendo el grado de hiperestatismo 3, podemos establecer 7-3=4 ecuaciones de equilibrio, de las cuales una ya se ha utilizado para determinar el mecanismo de colapso, lo cual nos deja tres ecuaciones de equilibrio, que obtendremos utilizando el PTV.

Usando el mecanismo virtual (1)

$$9{,}867 \cdot 9\theta = M_1 \cdot \theta + 3 \cdot 36\theta \qquad \Rightarrow \qquad M_1 = -19{,}2\ kNm$$

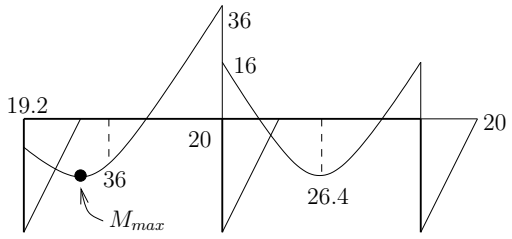


Por equilibrio de momentos del nudo central

$$M_5 = 36 - 20 = 16\ kNm$$

Usando el mecanismo virtual (2)

$$9{,}867 \cdot 9\theta = (16 + 20)\theta + 2M_6 \cdot \theta \qquad \Rightarrow \qquad M_6 = 26{,}4\ kNm$$



El diagrama de momentos resultante se puede calcular y representar en la figura. Se puede observar que el momento plástico de 36 kNm se excede en el vano de la viga izquierda, por lo que no se cumple el criterio de plastificación, y podemos decir por el teorema del máximo que $\lambda = 1{,}973$ es superior al crítico. . Calculando la viga como una viga biapoyada con carga distribuida 9.867 kN/m y con momentos flectores 19.2 kNm a la izquierda y 36 kNm a la derecha, se puede calcular que el momento flector máximo se produce a 2.0675 m del extremo izquierdo y tiene un valor de 40.29 kNm. Tomando esta elección de distribución de tensiones, y buscando el nuevo factor de carga tal que se cumpla el criterio de plastificación,

$$\lambda = 1{,}973\frac{36}{40{,}29} = 1{,}763$$

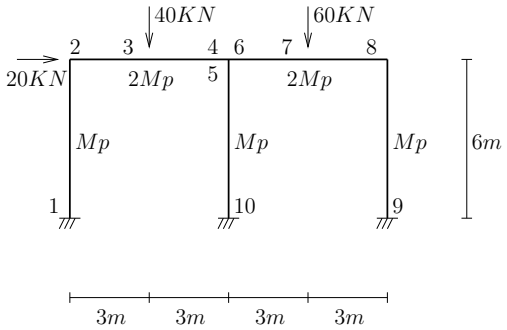
podemos concluir que dicho factor de carga es inferior al crítico y por tanto una cota inferior, es decir,

$$1{,}973 \geq \lambda_c \geq 1{,}763$$

Si esta acotación no es lo suficientemente precisa, se puede repetir el cálculo posicionando la rótula en el lugar predicho anteriormente, y obtener dos nuevas cotas superior e inferior más ajustadas.

Práctica 4

Calcúlese el momento plástico necesario para que colapse la estructura y el diagrama de momentos flectores resultante para el pórtico de la figura, en el que las columnas tienen un momento plástico distinto del de las vigas.



Solución 4

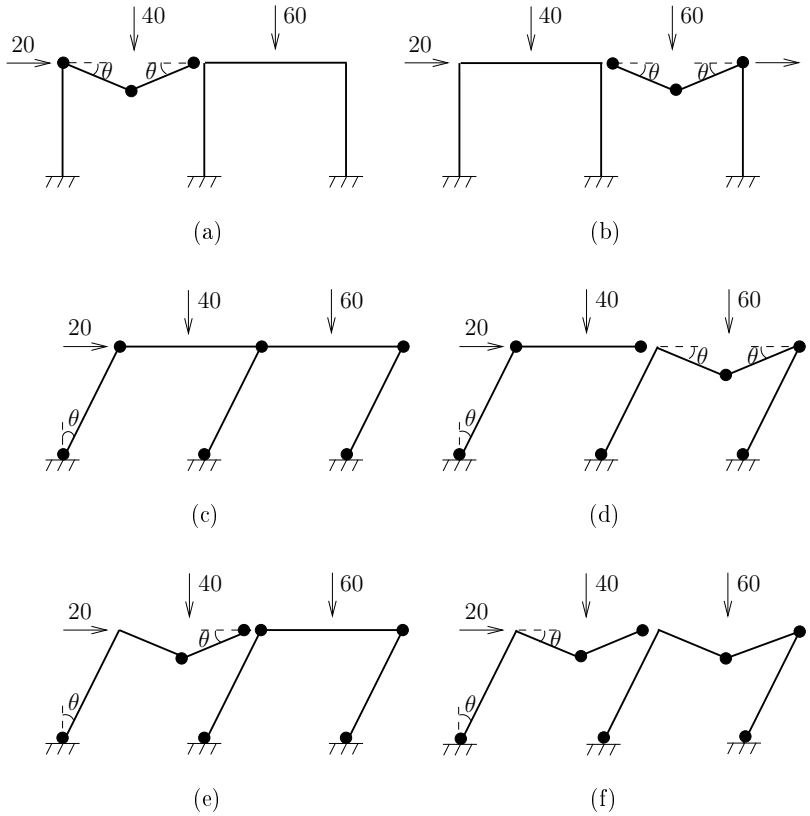
La particularidad de este caso es que se pueden presentar mecanismos de colapso parcial, según los cuales parte de la estructura continua en régimen elástico. El número de secciones críticas es diez, numerados en el enunciado, seis para los nudos, otros dos en los centros de los vanos superiores, donde hay cargas aplicadas, y dos más porque el nudo central superior puede generar tres rótulas distintas. Puesto que el grado de hiperestatismo de la estructura es seis, el número de mecanismos independientes es cuatro. De ellos dos son incompletos, y vamos a estudiar los tres probables y sus combinaciones más plausibles. Procediendo de modo similar al caso anterior, utilizamos el PTV para establecer ecuaciones de equilibrio necesarias para definir la carga de colapso para los distintos modos.

Mecanismo parcial izquierdo (a)

$$120\theta = 7M_p\theta \qquad \Rightarrow \qquad M_p = 17{,}2\ kNm$$

Mecanismo parcial derecho (b)

$$180\theta = 7M_p\theta \qquad \Rightarrow \qquad M_p = 25{,}7\ kNm$$



Mecanismo de cimbreo (c)

$$120\theta = 6M_p\theta \qquad \Rightarrow \qquad M_p = 20{,}0\ kNm$$

Mecanismo combinado 1 (d)

$$300\theta = 12M_p\theta \qquad \Rightarrow \qquad M_p = 25{,}0\ kNm$$

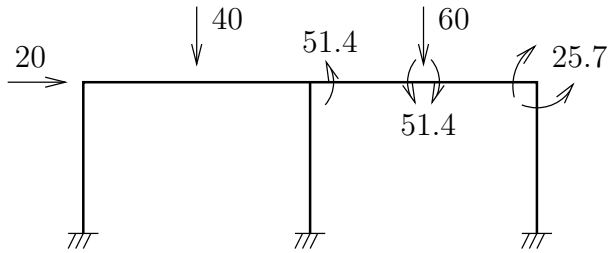
Mecanismo combinado 2 (e)

$$240\theta = 11M_p\theta \qquad \Rightarrow \qquad M_p = 21{,}8\ kNm$$

Mecanismo combinado 3 (f)

$$420\theta = 17M_p\theta \qquad \Rightarrow \qquad M_p = 24{,}7\ kNm$$

Por tanto se deduce que el mecanismo de colapso es aquel que requiere un máximo momento plástico, es decir el mecanismo parcial derecho, con



$M_p = 25{,}7\ kNm$. Los datos conocidos quedan resumidos en la siguiente figura.

Debido a que parte de la estructura se conserva en régimen elástico, resulta problemático encontrar la ley de momentos flectores, pues el número de ecuaciones de equilibrio disponibles para encontrar los nueve valores definitorios de la ley de momentos (en las secciones críticas), es de $NSC - GHT = 4$ (ya que por cada estado virtual independiente podremos escribir del PTV una ecuación de equilibrio independiente), de las que una ya se ha usado para determinar M_p. El resto de las ecuaciones necesarias son de compatibilidad y comportamiento, que a su vez depende de la historia de carga. Puesto que el mecanismo parcial sólo nos especifica los momentos (M_p) en tres de las secciones (donde se forman las rótulas), quedan $10 - 3 = 7$ incógnitas por determinar. La diferencia $7 - 3 = 4$ nos da el número de momentos que no podemos conocer por equilibrio. Sólo podemos decir de ellos que, de acuerdo al criterio de plastificación, no superarán el valor de M_p.

Pero podemos hacer una estimación fijándonos en que el mecanismo de colapso más cercano al real, el (d), involucra a las secciones 1, 2, 4, 7, 8, 9 y 10, por lo que podemos estimar que los momentos en esos lugares serán muy próximos a los plásticos. Es decir, que podemos asignar cuatro valores de modo aproximado, como por ejemplo, $M_2 = 25{,}7\ kNm$, $M_4 = 51{,}4\ kNm$, $M_9 = 25{,}7\ kNm$ y $M_{10} = 25{,}7\ kNm$. Si eligiéramos otras combinaciones obtendríamos otras leyes de momentos flectores que acabarían acotando los valores reales.

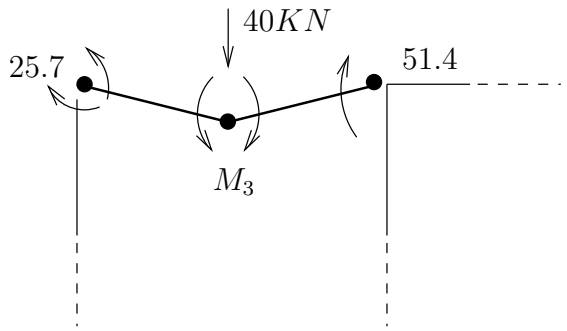
Las otras tres ecuaciones de equilibrio son,

PTV usando el estado virtual de la viga superior izquierda

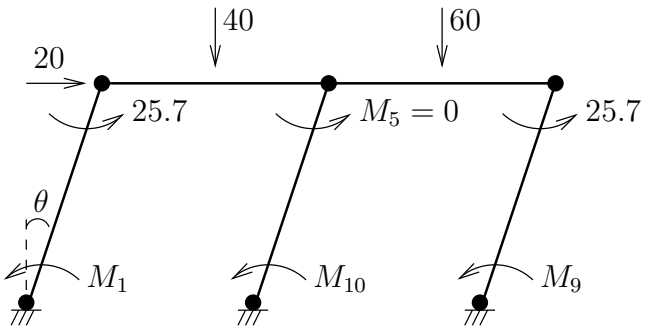
$$40 \cdot 3\theta = (-27{,}5 + 51{,}4 + 2M_3)\theta \quad \Rightarrow \quad M_3 = 47{,}15\ kNm$$

Equilibrio en el nudo central superior

$$M_5 = 0\ kNm$$

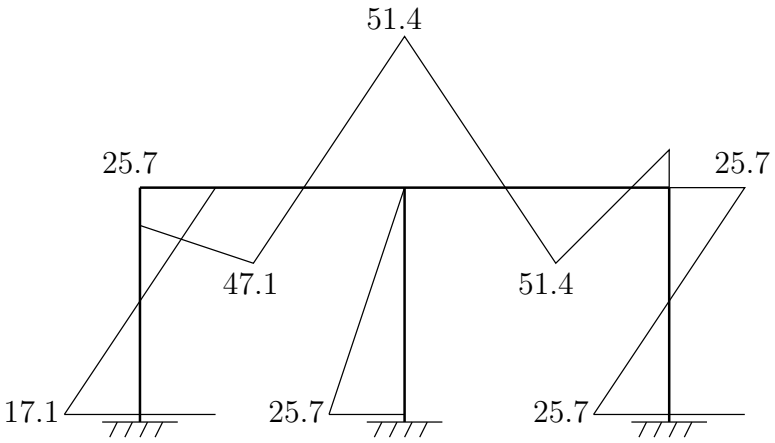


PTV usando el estado virtual de cimbreo



$$20 \cdot 6\theta = (27{,}5 + 0 + 27{,}5 + M_1 + M_9 + M_10)\theta \quad \Rightarrow \quad M_1 = 17{,}1 \ kNm$$

Con ello, la ley de momentos flectores resulta como en la figura, y sus valores son bastante aproximados a los obtenidos por un método computacional elasto-plástico, que es el único método práctico para aproximarse mejor a la solución exacta.


51.4
25.7
25.7
47.1
51.4
17.1
25.7
25.7

Capítulo 5

Dimensionamiento óptimo

Índice

5.1. Simplificaciones

5.2. Formulación general

5.3. Teoremas

Una cuestión de gran interés para aprovechar del mejor modo los recursos naturales y humanos disponibles, que se puede interpretar como reducir costes, es optimizar la estructura. Esta optimización se puede definir de muchos modos, pero uno muy usual es la minimización de su coste económico.

A continuación se describe un método para la determinación de este óptimo bajo una serie de simplificaciones que pueden mostrar una cierta discrepancia con la realidad y predecir economías mayores a las reales. Todo el proceso se realiza asumiendo una topología prefijada de la estructura, es decir, se prescribe el número, posición y conexión de las barras que forman la estructura, y se deja como variable a optimizar la sección de cada una.

5.1. Simplificaciones

El primer problema es establecer el criterio de optimalidad. El coste de una estructura es una compleja interacción entre el coste de los materiales básicos con el coste de su manipulación, montaje y gestión. Muchos de estos factores no son ponderables fuera de la oficina del fabricante y proyectista. Para salvar esto se hace la hipótesis simplificatoria de que el coste total es una función lineal del material utilizado (peso), con una componente directa (pendiente) y una indirecta (constante). Esto viene corroborado por una buena correlación al comparar peso y coste de los elementos comerciales.

Por otra parte vamos a suponer una disponibilidad de dimensiones de barras con un espectro continuo, aunque entre los elementos comerciales puede haber saltos de hasta un 10 % entre un tamaño y el siguiente.

En tercer lugar, se desprecia el efecto de esfuerzos axiles y cortantes en la capacidad del momento plástico M_p y se supone una correlación lineal entre su valor y la cantidad de material de la barra. En general, aunque existen correlaciones que se aproximan a $P = \alpha M_p^{0,6}$, esta última simplificación induce a errores del orden del 1 % si la razón de momentos es de 2:1, lo cual daremos por admisible.

De estas hipótesis se puede reducir el problema de optimización al de la minimización del peso P, que se puede a su vez representar para un único elemento como una función del momento plástico del tipo,

$$P = a + bM_p$$

En el caso de que tengamos varias barras con sus respectivos momentos plásticos, el peso será,

$$P = a \sum_{j=1}^{b} L_j + b \sum_{j=1}^{b} L_j M_{pj}$$

y puesto que el primer sumando es una constante de la estructura, la minimización de P es equivalente a la minimización de una cantidad Z,

$$Z = \sum_{j=1}^{b} L_j M_{pj}$$

5.2. Formulación general

Las condiciones que la estructura óptima ha de cumplir son las de equilibrio, mecanismo y plastificación. El procedimiento general consistirá en buscar todos los mecanismos de colapso posibles y establecer mediante el PTV las ecuaciones de equilibrio que los definen. Si en el PTV imponemos que las cargas externas sean las reales y el momento plástico en cada estado sea inferior igual al momento plástico real requerido ($M_{pj} \geq M_j$), cada una de esas ecuaciones, para que cumplan la condición de plastificación, tendrán la forma de desigualdad, dado que las combinaciones de momentos plásticos óptimos serán superiores a las establecidas por cada mecanismo de colapso individualmente.

Esto lleva a definir el problema de optimización bajo régimen plástico como la minimización,

$$\underset{M_{pj}}{min}\ Z = \sum_{j=1}^{b} L_j M_{pj}$$

sujeto a las condiciones,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{b} \theta_j^I M_{pj} &\geq \sum_{i=1}^{n} \left\{ H_i u_i^I + V_i v_i^I + M_i \theta_i^I \right\} \\
\sum_{j=1}^{b} \theta_j^{II} M_{pj} &\geq \sum_{i=1}^{n} \left\{ H_i u_i^{II} + V_i v_i^{II} + M_i \theta_i^{II} \right\} \\
&\cdots
\end{aligned}$$

Esta es una formulación típica de problemas de optimización con restricciones, para las que existen técnicas computacionales muy bien adaptadas llamadas de programación lineal, para cuya solucíón existen paquetes comerciales estándar así como de libre distribución.

Esta formulación se ilustra con el primer ejemplo al final de este capítulo.

5.3. Teoremas

Existe un procedimiento debido a Foulkes (1954) que trata de sistematizar algunas cuestiones de la formulación antedicha, aprovechando la estructura de las desigualdades obtenidas por el Principio de los Trabajos Virtuales, y se basan el el concepto de mecanismo compatible en peso.

Se pueden combinar dos a dos las ecuaciones de equilibrio obtenidas por el Principio de los Trabajos Virtuales mediante la definición de un giro independiente correspondiente a cada mecanismo de colapso, θ^I y θ^{II} y su posterior suma queda,

$$\sum_{j=1}^{b} \theta_j^I M_{pj}^I + \theta_j^{II} M_{pj}^{II} \geq \sum_{i=1}^{n} \left\{ H_i u_i^I + V_i v_i^I + M_i \theta_i^I + H_i u_i^{II} + V_i v_i^{II} + M_i \theta_i^{II} \right\}$$

Se define un mecanismo **compatible en peso** como aquel compuesto por dos estados de modo que se puede encontrar una combinación de θ^I y θ^{II}, tal que los coeficientes que afectan a M_{pj} sean los mismos que afectan a la familia $Z = \sum_{j=1}^{b} L_j M_{pj}$. Gráficamente, un mecanismo compatible en peso representa una intersección de dos ecuaciones de equilibrio cuyo vértice es capaz de albergar la pendiente de la familia $Z = \sum_{j=1}^{b} L_j M_{pj}$, o, en otras palabras, definen un vértice tangente a la familia de curvas de peso, y por tanto candidato a ser el óptimo.

Teorema de Foulkes de existencia Si el diseño de un pórtico se especifica mediante n valores diferentes de momentos plásticos, siempre será posible encontrar, al menos, un diseño de peso mínimo para el cual el colapso del mecanismo tiene n grados de libertad.

En este punto hay que darse cuenta de que un mecanismo compatible en peso no es necesariamente seguro, pues sólo implica la comprobación de dos desigualdades de equilibrio de dos mecanismos (dos rectas del diagrama). Por tanto es necesario que se cumplen todas las demás desigualdades de los demás mecanismos. Gráficamente, esto consiste en comprobar que el punto de intersección se encuentra en la región admisible descrita por todas las rectas.

Teorema de Foulkes de mínimo peso Si se puede encontrar un mecanismo compatible en peso de un diseño de pórtico, y también se puede corresponder una distribución de momentos flectores segura y estáticamente admisible, el diseño será de peso mínimo. Nótese sin embargo que este teorema no implica que exista un único diseño óptimo.

Los teoremas anteriores se pueden replantear en forma de una búsqueda de límites superiores e inferiores del peso o coste del diseño.

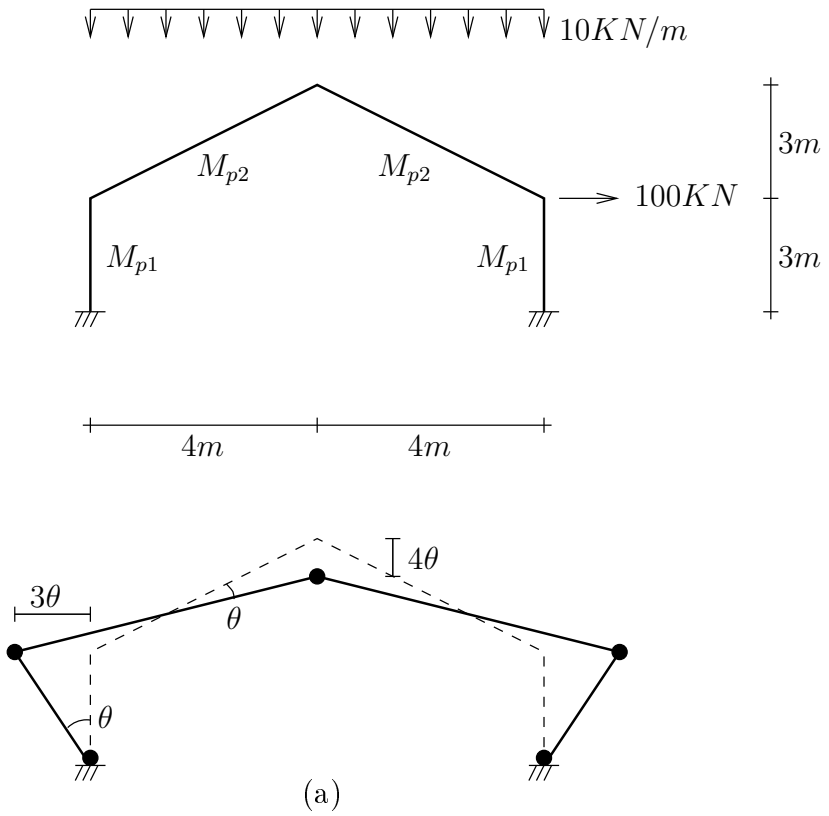
Límite superior del peso Si para un diseño de pórtico se puede comprobar que el colapso sólo ocurrirá en un mecanismo concreto mientras que se le puede corresponder una distribución segura y estáticamente admisible, el peso de este diseño es mayor o igual que el peso mínimo.

Un diseño que cumpla estas premisas se encontrará dentro de la región admisible.

Límite inferior del peso Si se puede encontrar un mecanismo compatible en peso de un diseño de pórtico, pero no se le puede corresponder una distribución segura y estáticamente admisible, el peso de este diseño es menor que el peso mínimo.

Práctica 5

Calcúlese el valor óptimo de los momentos plásticos M_{p1} para las columnas y M_{p2} para el tejado del pórtico de la figura.



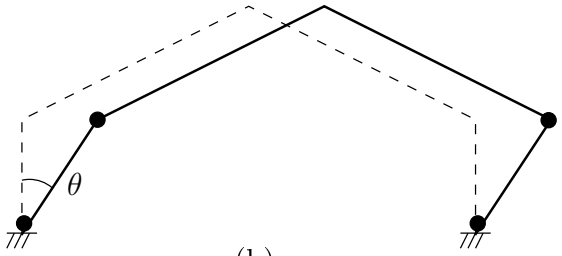
(a)

Solución 5

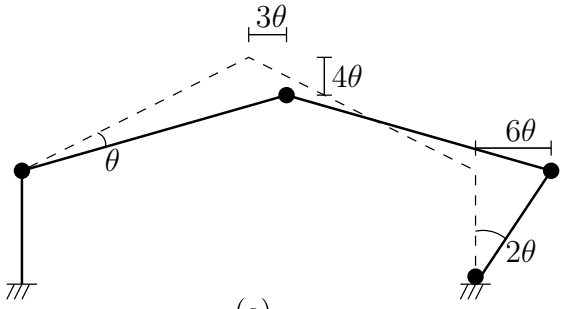
La función a optimizar se deriva de las longitudes de cada tipo de barra multiplicada por sus momentos plásticos correspondientes, dando,

$$Z = 6M_{p1} + 10M_{p2}$$

Por otra parte, haciendo un análisis de los mecanismos de la estructura, partimos de que tiene un grado de hiperestatismo total de tres, y el pórtico consta de cinco secciones críticas, una en cada nudo. De ello se deduce que el número de mecanismos de colapso independientes es dos, y existe una combinación de ellos, todos descritos a continuación.



(b)



(c)

Las restricciones al problema de optimización vienen de la consideración de las condiciones de mecanismo de colapso.

Si observamos las rótulas que unen barras con distinto momento plástico, puesto que no conocemos a priori cuál de ellos es el menor, es necesario duplicar las combinaciones, unas suponiendo que $M_{p1} \geq M_{p2}$, que dan los mecanismos (a), (b) y (c), y otras suponiendo que $M_{p2} \geq M_{p1}$, que dan (d), (e) y (f).

Mecanismo de cimbreo (a)

$$2\theta M_{p1} + 2\theta M_{p2} \geq 3\theta \cdot 100 \quad \Rightarrow \quad M_{p1} + M_{p2} \geq 150\ kNm$$

Mecanismo de cimbreo (d)

$$4\theta M_{p1} \geq 3\theta \cdot 100 \quad \Rightarrow \quad M_{p1} \geq 75\ kNm$$

Mecanismo de barra (b)

$$2\theta M_{p1} + 6\theta M_{p2} \geq 4\theta \cdot 8\frac{1}{2}10 + 6\theta \cdot 100 \quad \Rightarrow \quad M_{p1} + 3M_{p2} \geq 380\ kNm$$

Mecanismo de barra (e)

$$6\theta M_{p1} + 2\theta M_{p2} \geq 4\theta \cdot 8\frac{1}{2}10 + 6\theta \cdot 100 \quad \Rightarrow \quad 3M_{p1} + M_{p2} \geq 380\ kNm$$

Mecanismo combinado (c)=(a)+(b)

$$4\theta M_{p1} + 6\theta M_{p2} \geq 4\theta \cdot 8\frac{1}{2}10 + 9\theta \cdot 100 \quad \Rightarrow \quad 2M_{p1} + 3M_{p2} \geq 530\ kNm$$

Mecanismo combinado (f)=(d)+(e)

$$8\theta M_{p1} + 2\theta M_{p2} \geq 4\theta \cdot 8\frac{1}{2}10 + 9\theta \cdot 100 \quad \Rightarrow \quad 4M_{p1} + M_{p2} \geq 530\ kNm$$

Los mecanismos combinados $(a) - (b)$ y $(d) - (e)$ no se excitan con la combinación de fuerzas dada, por lo que no lo consideramos.

Puesto que el número de parámetros a optimizar, M_{p1} y M_{p2}, es dos, podemos representar el proceso de optimización en una gráfica bidimensional, en el que en cada eje se representa el valor de cada uno de los momentos plásticos. En el caso de un número superior de parámetros, no es posible utilizar métodos gráficos, y se recurre a métodos de programación lineal.

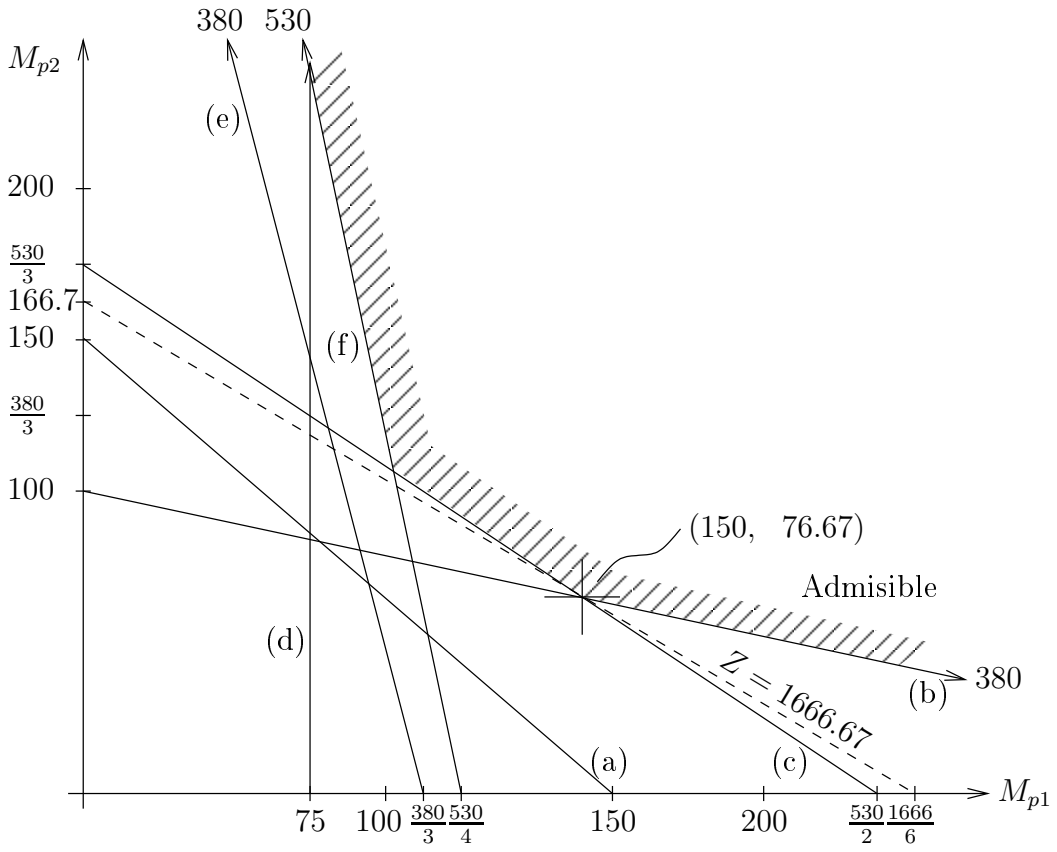
Cada una de las seis desigualdades se representa como una línea que divide el espacio en una zona admisible (a su derecha) e inadmisible. La intersección de las zonas admisibles es la zona rayada.

Por otra parte, la función Z a minimizar describe una relación entre los parámetros, es decir, una pendiente en el diagrama bidimensional, o una familia de rectas (todas las paralelas a la línea discontinua) con dicha pendiente, en la que cada línea une todos los puntos de igual coste. Las líneas más a la izquierda son más baratas.

La solución óptima la dará la intersección entre la línea de igual coste que se sitúe más a la izquierda con la zona admisible rayada. Dicha intersección es el punto O, que proporciona el par de valores,

$$O = \begin{cases} M_{p1} = 150\ kNm \\ M_{p2} = 76{,}67\ kNm \end{cases}$$

Esta intersección será precisamente uno de los vértices del polígono que encierra a la zona admisible, tal y como predice el teorema de Foulkes.


380
530
M_{p2}
(e)
200
$\frac{530}{3}$
166.7
150
(f)
$\frac{380}{3}$
100
(150, 76.67)
Admisible
(d)
(b)
380
$Z = 1666.67$
(a)
(c)
M_{p1}
75
100
$\frac{380}{3}$
$\frac{530}{4}$
150
200
$\frac{530}{2}$
$\frac{1666}{6}$

Bibliografía

[1] Sir John Baker and Jacques Heyman. *Plastic Design of Frames. 1. Fundamentals*. Cambridge University Press, 1969.

[2] Jacques Heyman. *Plastic Design of Frames. 2. Applications*. Cambridge University Press, 1971.

[3] J. M. Davies and B. A. Brown. *Plastic Design to BS 5950*. Blackwell Science, 1996.

[4] W. F. Chen and H. Zhang. *Structural Plasticity. Theory, Problems and CAE software*. Springer Verlag, 1991.

[5] I. M. Smith and D. V. Griffiths. *Programming the Finite Element Method*. Wiley, 1997.

[6] B. G. Neal. *The Plastic Methods of Structural Analysis*. Chapman & Hall Ltd., 1956.

[7] C. Benito Hernández. *Nociondes de Cálculo Plástico*. Madrid, 1975.