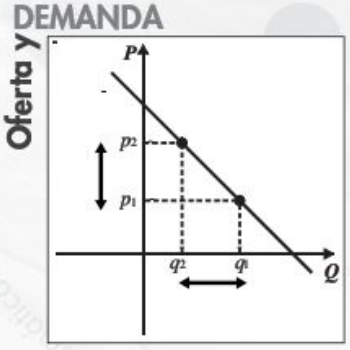
CAPÍTULO 3

PENDIENTE DE UNA RECTA



Curva de demanda lineal

En la práctica algunas ecuaciones de oferta y demanda son aproximadamente lineales en un intervalo.

En el análisis económico sólo se toma la porción de las rectas lineales que se encuentran en el primer cuadrante, ya que la oferta, el precio y la demanda son cero o positivas.

Curva de demanda lineal

Caso I

Cuando la pendiente de la recta es negativa aumenta el precio y la cantidad de demanda disminuye y viceversa.

Caso II

Cuando la pendiente de la recta es cero el precio permanece constante, sin considerar que la demanda aumenta.

Caso III

Cuando la pendiente de la recta no existe el precio aumenta y la cantidad de demanda permanece constante.

P: Precio

Q: Cantidad de demanda

Definiciones

Inclinación de una recta. Es el ángulo que una recta forma con el eje X positivo, el cual se representa con el símbolo θ, este ángulo se mide a partir del eje X y girando en sentido opuesto a las manecillas del reloj.

Pendiente de una recta. Se define como la tangente del ángulo de inclinación que tiene una recta y se representa con la letra m.

$$m = tan\ \theta$$

Donde:

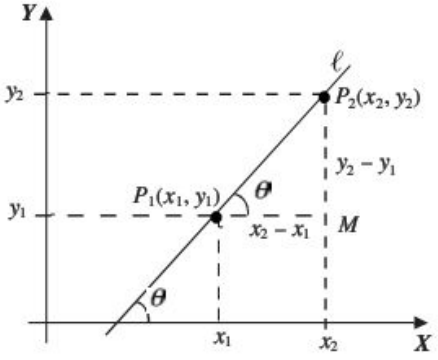
$$\theta = arc\ tan\ (m) \text{ si } m > 0 \qquad \theta = arc\ tan\ (m) + 180° \text{ si } m < 0$$

Pendiente de una recta que pasa por dos puntos

Sea la recta ℓ que pasa por los puntos P_1 y P_2, entonces su pendiente se define como:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Demostración



La pendiente de la recta ℓ es,

$$m = tan\ \theta$$

En el triángulo P_1MP_2,

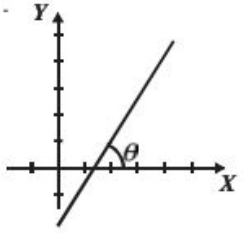
$$tan\ \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Por consiguiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

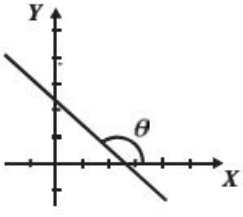
Los casos que se presentan para el valor de la pendiente y su ángulo de inclinación, son los siguientes:

1. Si $m > 0$ (positiva) entonces, el ángulo es agudo.



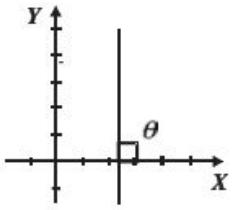
Si $m > 0$, entonces, $0° < \theta < 90°$

2. Si $m < 0$ (negativa) entonces, el ángulo es obtuso.

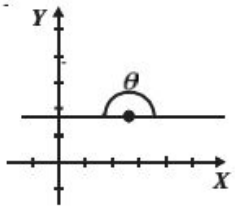


Si $m < 0$, entonces, $90° < \theta < 180°$

3. Si $m = \frac{c}{0}$ entonces, el ángulo es recto.



4. Si $m = 0$, el ángulo es llano.



EJEMPLOS

Ejemplos

1 Una recta pasa por los puntos $A(-2, -1)$ y $B(3, 4)$. Determina su pendiente y el ángulo de inclinación.

Solución

Se sustituyen los valores de las abscisas y ordenadas en la fórmula: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$m = \frac{4-(-1)}{3-(-2)} = \frac{4+1}{3+2} = \frac{5}{5} = 1$$

Luego, si $m = 1$ entonces, $tan\ \theta = 1$, en consecuencia:

$$\theta = arc\ tan\ (1) = 45°$$

Por consiguiente, $m = 1$ y $\theta = 45°$.

2 Calcula la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $P(1, 4)$ y $Q(7, -3)$.

Solución

Al sustituir los valores en $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, se obtiene:

$$m = \frac{-3-4}{7-1} = -\frac{7}{6}$$

Como $m = -\frac{7}{6}$, entonces, el ángulo de inclinación es:

$$\theta = arc\ tan\left(-\frac{7}{6}\right) + 180° = -49°\ 23' + 180° = 130°\ 37'$$

Por tanto, el valor de la pendiente es $-\frac{7}{6}$ y el del ángulo de inclinación 130° 37'.

3 ●●○ Verifica si los puntos $A(-2, 4)$, $B(0, 1)$ y $C(4, -5)$ son colineales, aplica la fórmula de la pendiente.

Solución

Para verificar que tres puntos son colineales se debe de cumplir que:

$$m_{AB} = m_{BC} = m_{AC}$$

Por consiguiente, se obtiene la pendiente de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$

$$\text{Pendiente del segmento } \overline{AB} \Rightarrow m_{AB} = \frac{1-4}{0-(-2)} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Pendiente del segmento } \overline{BC} \Rightarrow m_{BC} = \frac{-5-1}{4-0} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Pendiente del segmento } \overline{AC} \Rightarrow m_{AC} = \frac{-5-4}{4-(-2)} = \frac{-9}{6} = -\frac{3}{2}$$

Se observa que las pendientes de los segmentos son iguales, en consecuencia los puntos son colineales.

4 ●●○ La pendiente de una recta es -4 y pasa por el punto $A(1, 5)$. Si la abscisa del punto B es -2, ¿cuál es su ordenada?

Solución

Se sabe que x = abscisa, y = ordenada, por tanto, los datos son:

$$m = -4,\ A(1, 5) \text{ y } B(-2, y)$$

Se sustituyen los valores anteriores en la fórmula: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y se despeja y.

$$-4 = \frac{y-5}{-2-1} \quad \rightarrow \quad -4 = \frac{y-5}{-3} \quad \rightarrow \quad (-4)(-3) + 5 = y \quad \rightarrow \quad y = 17$$

Finalmente, el punto B tiene como coordenadas $(-2, 17)$.

5 ●●○ El ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $P_1(-1, 5)$ y $P_2(x, 1)$ con el eje X es de 135°. ¿Cuál es el valor de la abscisa de P_2?

Solución

Se obtiene la pendiente de la recta:

$$m = tan\ 135°$$
$$m = -1$$

Se sustituyen los valores de la pendiente, las abscisas y ordenadas en la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad -1 = \frac{1-5}{x-(-1)}$$

$$-1 = \frac{-4}{x+1}$$

Se despeja x:

$$-1(x+1) = -4$$

$$x+1 = \frac{-4}{-1}$$

$$x = 4 - 1$$

$$x = 3$$

Por consiguiente, el valor de la abscisa de P_2 es 3.

EJERCICIO 9

Determina la pendiente de los siguientes pares de puntos:

1. $A(-3, 5)$ y $B(2, 7)$
2. $A(-1, 2)$ y $B(4, -5)$
3. $A(8, -2)$ y $B(0, -1)$
4. $A(0, 4)$ y $B(-3, 0)$
5. $A(-5, 1)$ y $B(1, -3)$
6. $A(4, -2)$ y $B(7, -2)$
7. $A\left(5, \sqrt{3}\right)$ y $B(5, 1)$
8. $A\left(\frac{1}{2}, 7\right)$ y $B\left(3, -\frac{3}{2}\right)$
9. $A\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{3}\right)$ y $B\left(-\frac{3}{5}, \frac{3}{4}\right)$
10. $A\left(\frac{a}{b}, 1\right)$ y $B(a, b)$

Encuentra la medida de los ángulos de inclinación de las rectas que pasan por los siguientes puntos:

11. $P(5, 7)$ y $Q(2, 4)$
12. $A(-1, 2)$ y $B(-2, 3)$
13. $A\left(\sqrt{3}, 3\right)$ y $B(0, 2)$
14. $R\left(3, \sqrt{2}\right)$ y $S(1, 0)$
15. $S(7, -1)$ y $T(7, 4)$
16. $Q(4, -5)$ y $R(-2, -5)$

Aplica el concepto de pendiente para saber cuáles de los siguientes puntos son colineales.

17. $A(1, 2)$, $B(2, 4)$ y $C(-1, -2)$
18. $A(-2, 2)$, $B(1, 3)$ y $C(-5, 1)$
19. $A(-1, 4)$, $B(3, 0)$ y $C(0, 3)$
20. $A(5, 1)$, $B(3, 4)$ y $C(2, 7)$
21. $A(0, 2)$, $B(-2, 4)$ y $C(2, 0)$
22. $A(3, -4)$, $B(2, -2)$ y $C(0, -1)$
23. $A(x, 2)$, $B(2x, 2 - y)$ y $C(0, 2 + y)$
24. $A(a, b)$, $B(2a + b, a)$ y $C(-b, 2b - a)$
25. La pendiente de una recta es 3. Si la recta pasa por los puntos $A(2, -1)$ y el punto B, cuya ordenada es -5, ¿cuál es el valor de su abscisa?
26. Una recta tiene un ángulo de inclinación de 45° y pasa por los puntos A y B. Si el punto A tiene coordenadas $(3, -2)$ y la ordenada de B es -1, encuentra su abscisa.
27. El ángulo de inclinación de una recta es de 60° y pasa por los puntos $A\left(2, 3\sqrt{3}\right)$ y B, cuya abscisa es $-\sqrt{3}$, ¿cuál es la ordenada de B?
28. Una recta forma un ángulo de 30° con el eje X y pasa por los puntos $A\left(3\sqrt{3}, -1\right)$ y $B\left(-2\sqrt{3}, y\right)$. Calcula el valor de la ordenada de B.

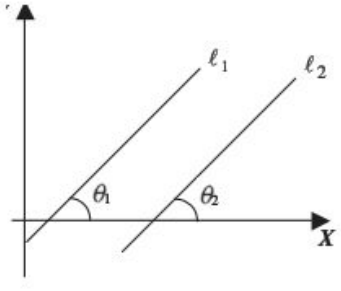
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Condición de paralelismo

Dos rectas son paralelas si sus ángulos de inclinación son iguales y, por tanto, sus pendientes también.

$$m_1 = m_2$$

Se denota como $\ell_1 \parallel \ell_2$ para indicar que ℓ_1 es paralela a ℓ_2



Si $\ell_1 \parallel \ell_2$, entonces

$$\theta_1 = \theta_2$$

Por ser correspondientes.

Aplicando la función tangente

$$tan\,\theta_1 = tan\,\theta_2$$

Finalmente, se determina que:

$$m_1 = m_2$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra que la recta ℓ_1, que pasa por los puntos $A(1, 1)$ y $B(5, 3)$ es paralela a la recta ℓ_2 que pasa por los puntos $C(8, 0)$ y $D(4, -2)$.

Solución

Se obtienen las pendientes de ambas rectas:

$$m_{AB} = \frac{3-1}{5-1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \; ; \; m_{CD} = \frac{-2-0}{4-8} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

Como $m_{AB} = m_{CD}$, entonces se demuestra que $\ell_1 \parallel \ell_2$.

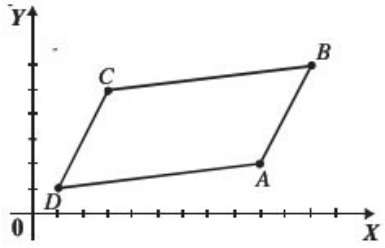
2 Demuestra que los puntos $A(9, 2)$, $B(11, 6)$, $C(3, 5)$ y $D(1, 1)$, son vértices de un paralelogramo.

Solución

Se determinan las pendientes de los lados:

$$m_{AB} = \frac{6-2}{11-9} = \frac{4}{2} = 2 \; ; m_{BC} = \frac{5-6}{3-11} = \frac{-1}{-8} = \frac{1}{8}$$

$$m_{CD} = \frac{1-5}{1-3} = \frac{-4}{-2} = 2 \; ; m_{AD} = \frac{1-2}{1-9} = \frac{-1}{-8} = \frac{1}{8}$$



Se observa que $m_{AB} = m_{CD}$ y $m_{BC} = m_{AD}$, por tanto, se deduce que $\overline{AB} \| \overline{CD}$ y $\overline{BC} \| \overline{AD}$.

Como los lados opuestos son paralelos, entonces la figura es un paralelogramo.

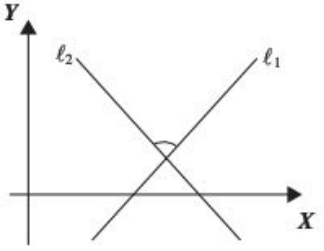
Condición de perpendicularidad

Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es igual a – 1.

Si $\ell_1 \perp \ell_2$ (ℓ_1 es perpendicular a ℓ_2), es decir, las rectas forman un ángulo de 90°, entonces:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

Por tanto, $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$ o $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$



EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra que la recta ℓ_1, que pasa por los puntos $A(2, 5)$ y $B(7, 3)$, es perpendicular a la recta ℓ_2, que pasa por los puntos $C(-1,-2)$ y $D(1, 3)$.

Solución

Se obtienen las pendientes de las rectas.
Pendiente de la recta ℓ_1:

$$m_{AB} = \frac{3-5}{7-2} = -\frac{2}{5}$$

Pendiente de la recta ℓ_2:

$$m_{CD} = \frac{3-(-2)}{1-(-1)} = \frac{3+2}{1+1} = \frac{5}{2}$$

Ahora se aplica la condición:

$$\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(\frac{5}{2}\right) = -1$$

Se demuestra que la recta ℓ_1 es perpendicular a la recta ℓ_2.

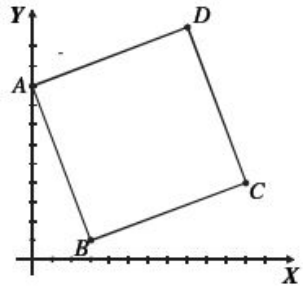
2 Demuestra que los lados adyacentes del cuadrilátero, cuyos vértices son los puntos $A(0, 9)$, $B(3, 1)$, $C(11, 4)$ y $D(8, 12)$, son perpendiculares entre sí.

Solución

Se determinan las pendientes de los lados:

$$m_{AB} = \frac{1-9}{3-0} = \frac{-8}{3} = -\frac{8}{3} \qquad m_{BC} = \frac{4-1}{11-3} = \frac{3}{8} \qquad m_{CD} = \frac{12-4}{8-11} = -\frac{8}{3} \qquad m_{AD} = \frac{12-9}{8-0} = \frac{3}{8}$$

En la figura:



Se observa que los lados adyacentes son:

$$\overline{AB} \text{ y } \overline{BC};\ \overline{BC} \text{ y } \overline{CD};\ \overline{CD} \text{ y } \overline{AD};\ \overline{AD} \text{ y } \overline{AB}$$

Ahora se multiplican las pendientes de los lados adyacentes para demostrar que son perpendiculares:

$$m_{AB}\cdot m_{BC} = \left(-\frac{8}{3}\right)\left(\frac{3}{8}\right) = -1 \qquad m_{CD}\cdot m_{AD} = \left(-\frac{8}{3}\right)\left(\frac{3}{8}\right) = -1$$

$$m_{BC}\cdot m_{CD} = \left(\frac{3}{8}\right)\left(-\frac{8}{3}\right) = -1 \qquad m_{AD}\cdot m_{AB} = \left(\frac{3}{8}\right)\left(-\frac{8}{3}\right) = -1$$

De aquí se determina que:

$$\overline{AB} \perp \overline{BC},\ \overline{BC} \perp \overline{CD},\ \overline{CD} \perp \overline{AD} \text{ y } \overline{AD} \perp \overline{AB}$$

Entonces, se demuestra que los lados adyacentes son perpendiculares entre sí.

EJERCICIO 10

1. Averigua si la recta ℓ_1 que pasa por los puntos $A(3, -1)$ y $B(-6, 5)$ es paralela o perpendicular a la recta ℓ_2 que pasa por los puntos $C(0, 2)$ y $D(-2, -1)$.
2. Comprueba por medio de pendientes que los puntos $A(1, 3)$, $B(2, 6)$, $C(7, 8)$ y $D(6, 5)$, son vértices de un paralelogramo.
3. Demuestra que la recta que pasa por los puntos $A(-2, 1)$ y $B(1, -4)$, es paralela a la recta que pasa por los puntos $C(8, -7)$ y $D(5, -2)$.
4. Comprueba por medio de pendientes que los puntos $A(3, 1)$, $B(7, 3)$ y $C(1, 5)$, son los vértices de un triángulo rectángulo.
5. Demuestra que los cuatro puntos $A(-3, 1)$, $B(-2, 5)$, $C(2, 4)$ y $D(1, 0)$, son vértices de un cuadrado y que sus diagonales son perpendiculares.
6. Una recta ℓ_1 pasa por los puntos $(-2, -1)$ y $(2, 3)$, y otra recta ℓ_2 pasa por el punto $(-1, 2)$ y el punto A, cuya ordenada es -4. Determina la abscisa del punto A cuando ℓ_1 es perpendicular a ℓ_2.
7. Demuestra por medio de pendientes que los puntos $A(-2, -1)$, $B(-4, 3)$, $C(3, 5)$ y $D(5, 1)$, son vértices de un paralelogramo.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ángulo entre dos rectas

Para encontrar el ángulo θ formado por las rectas ℓ_1 y ℓ_2 se utiliza la fórmula:

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

Por geometría: $\beta = \alpha + \theta$ y $\theta = \beta - \alpha$

Aplicando tangente: $\tan\theta = \tan(\beta - \alpha)$

$$\tan\theta = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta \cdot \tan\alpha}$$

Pero $\tan\beta = m_2$ y $\tan\alpha = m_1$

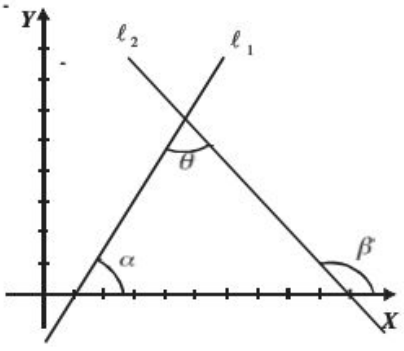
Entonces, $\tan\theta = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$

Donde:

θ: Ángulo entre las rectas

m_1: pendiente inicial de la recta ℓ_1

m_2: pendiente final de la recta ℓ_2



Se debe de tomar en cuenta que los ángulos se miden en sentido contrario a las manecillas del reloj; en la recta que inicie el ángulo, será la pendiente inicial, y en la recta que termine, la pendiente final.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la medida del ángulo obtuso que forman las rectas, cuyas pendientes son 2 y – 3.

Solución

En este caso no importa cuál sea la pendiente inicial o final, se escoge $m_1 = 2$ y $m_2 = -3$, se sustituyen en la fórmula y se obtiene:

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{-3-2}{1+(-3)(2)} = \frac{-5}{1-6} = \frac{-5}{-5} = 1$$

De aquí, $\tan\theta = 1$ entonces: $\theta = arc\ tan\ (1) = 45°$.

El ángulo obtuso ϕ se determina al calcular el suplemento de θ

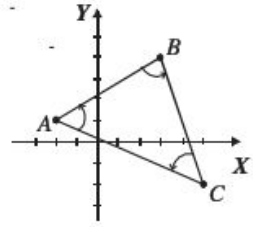
$$45° + \phi = 180°$$
$$\phi = 180° - 45°$$
$$\phi = 135°$$

En consecuencia, el ángulo que se busca es igual a 135°.

2 ¿Cuál es la medida de los ángulos interiores del triángulo determinado por los puntos $A(-2, 1)$, $B(3, 4)$ y $C(5, -2)$?

Solución

Se grafica el triángulo en el plano cartesiano y se ubican para cada ángulo las pendientes inicial y la final.



Para el ángulo A: $m_1 = m_{AC}$; $m_2 = m_{AB}$

Para el ángulo B: $m_1 = m_{AB}$; $m_2 = m_{BC}$

Para el ángulo C: $m_1 = m_{BC}$; $m_2 = m_{AC}$

Se obtienen las pendientes de los lados del triángulo:

$$m_{AB} = \frac{4-1}{3-(-2)} = \frac{3}{5} \qquad m_{BC} = \frac{-2-4}{5-3} = \frac{-6}{2} = -3 \qquad m_{AC} = \frac{-2-1}{5-(-2)} = -\frac{3}{7}$$

Se aplica la fórmula para cada uno de los ángulos, tomando como referencia las pendientes inicial y final.

$$\tan A = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{\frac{3}{5} - \left(-\frac{3}{7}\right)}{1 + \left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{3}{7}\right)} = \frac{\frac{3}{5} + \frac{3}{7}}{1 - \frac{9}{35}} = \frac{\frac{21+15}{35}}{\frac{35-9}{35}} = \frac{\frac{36}{35}}{\frac{26}{35}} = \frac{(35)(36)}{(35)(26)} = \frac{36}{26} = \frac{18}{13}$$

$$\tan B = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{-3 - \frac{3}{5}}{1 + (-3)\left(\frac{3}{5}\right)} = \frac{-3 - \frac{3}{5}}{1 - \frac{9}{5}} = \frac{\frac{-15-3}{5}}{\frac{5-9}{5}} = \frac{-\frac{18}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{(5)(-18)}{(5)(-4)} = \frac{-18}{-4} = \frac{9}{2}$$

$$\tan C = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{-\frac{3}{7} - (-3)}{1 + \left(-\frac{3}{7}\right)(-3)} = \frac{-\frac{3}{7} + 3}{1 + \frac{9}{7}} = \frac{\frac{-3+21}{7}}{\frac{7+9}{7}} = \frac{\frac{18}{7}}{\frac{16}{7}} = \frac{(7)(18)}{(7)(16)} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}$$

Finalmente, los ángulos son:

$A = arc\ tan\left(\frac{18}{13}\right) = 54°\ 9'\ 44''$ $\qquad$ $B = arc\ tan\left(\frac{9}{2}\right) = 77°\ 28'16''$

$C = arc\ tan\left(\frac{9}{8}\right) = 48°\ 21'59''$

Para comprobar los resultados se suman los ángulos interiores y el resultado debe ser 180°

$A + B + C = 180°$ $\qquad$ $54°\ 9'\ 44'' + 77°\ 28'\ 16'' + 48°\ 21'\ 59'' = 180°$

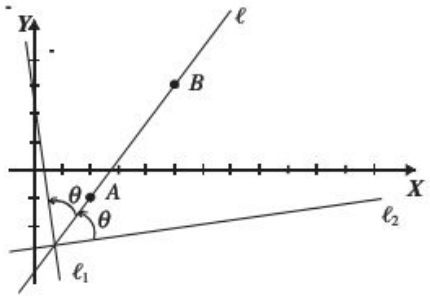
$180° = 180°$

3 ¿Cuál es la pendiente de la recta que forma un ángulo de 45°, con la recta que pasa por los puntos de coordenadas $A(2, -1)$ y $B(5, 3)$?

Solución

Existen dos rectas que forman un ángulo de 45° con la recta ℓ, por consiguiente, se tienen 2 casos:

1. La pendiente ℓ es inicial
2. La pendiente ℓ es final



Se obtiene la pendiente ℓ que pasa por los puntos A y B:

$$m_{AB} = \frac{3-(-1)}{5-2} = \frac{4}{3}$$

Cuando la pendiente ℓ es inicial, se debe de encontrar m_2, entonces:

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \quad \rightarrow \quad \tan 45° = \frac{m_2 - \frac{4}{3}}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)m_2} \quad \rightarrow \quad 1 = \frac{\frac{3m_2 - 4}{3}}{\frac{3 + 4m_2}{3}}$$

$$1 = \frac{3m_2 - 4}{3 + 4m_2}$$

$$3 + 4m_2 = 3m_2 - 4$$

$$4m_2 - 3m_2 = -4 - 3$$

$$m_2 = -7$$

Cuando la pendiente ℓ es final, se debe de encontrar m_1, por consiguiente:

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \quad \rightarrow \quad \tan 45° = \frac{\frac{4}{3} - m_1}{1 + m_1\left(\frac{4}{3}\right)} \quad \rightarrow \quad 1 = \frac{\frac{4 - 3m_1}{3}}{\frac{3 + 4m_1}{3}}$$

$$1 = \frac{4 - 3m_1}{3 + 4m_1}$$

$$3 + 4m_1 = 4 - 3m_1$$

$$4m_1 + 3m_1 = 4 - 3$$

$$m_1 = \frac{1}{7}$$

Finalmente, las pendientes son: -7 y $\frac{1}{7}$.

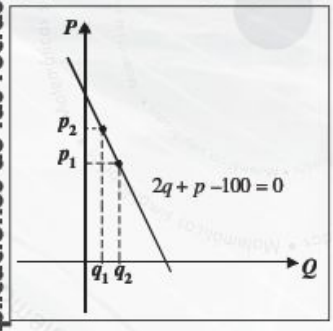
EJERCICIO 11

1. Determina la medida del ángulo agudo que forman las rectas con pendientes $\frac{1}{3}$ y $-\frac{4}{5}$.
2. ¿Cuál es la medida de cada uno de los ángulos interiores del triángulo, cuyos vértices son los puntos $A(-2, 2)$, $B(1, -1)$ y $C(0, -4)$?
3. Determina los ángulos interiores del triángulo, cuyos vértices son los puntos $A(-4, 1)$ $B(2, 3)$ y $C(1, -4)$.
4. Demuestra que los puntos $A(-2, 1)$, $B(3, 5)$ y $C(7, 0)$, son los vértices de un triángulo isósceles y encuentra la medida de sus ángulos interiores.
5. Comprueba que los puntos $A(3, 1)$, $B(7, 3)$ y $C(5, 2)$, son vértices de un triángulo rectángulo y encuentra la medida de sus ángulos agudos.
6. Encuentra la medida del ángulo obtuso del paralelogramo cuyos vértices son los puntos $A(-4, 1)$, $B(-2, 4)$, $C(5, 5)$ y $D(3, 2)$.
7. ¿Cuáles son las medidas de los ángulos interiores del paralelogramo, cuyos vértices son los puntos $A(1, 3)$, $B(2, 6)$, $C(7, 8)$ y $D(6, 5)$?
8. Comprueba que los puntos $A(-2, -1)$, $B(-4, 3)$, $C(3, 5)$ y $D(5, 1)$ son los vértices de un paralelogramo y determina la medida del ángulo obtuso que forman sus diagonales.
9. Al cortarse dos rectas forman un ángulo de 150°, si la recta final tiene pendiente $\frac{3}{5\sqrt{3}}$, calcula la pendiente de la recta inicial.
10. Al cortarse dos rectas forman un ángulo de 45°, la recta inicial pasa por los puntos $A(-1, 3)$ y $B(-4, 5)$ y la recta final pasa por el punto $C(3, 2)$ y por el punto D, cuya ordenada es 3. Determina el valor de la abscisa de D.
11. ¿Cuál es la pendiente de la recta que forma un ángulo de 135°, con la recta que pasa por los puntos de coordenadas $A(-3, 5)$ y $B(0, 1)$?
12. Las pendientes de dos rectas son 1 y $-2-\sqrt{3}$, respectivamente. Encuentra las pendientes de las bisectrices de los ángulos que forman (existen dos soluciones).

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

EN MICROECONOMÍA

Aplicaciones de las rectas



Gráfica de la curva de demanda

Curvas de demanda lineal

Las ecuaciones lineales proporcionan representaciones razonablemente precisas de la demanda en un intervalo limitado.

En general, las ecuaciones de demanda lineales se utilizan para mayor simplicidad y claridad al ilustrar cierto tipo de análisis.

La ecuación de la recta indica situaciones que se presentan al realizar un análisis:

Por ejemplo:

Cuando el precio es de 80 unidades monetarias (*u.m.*) se venden 10 relojes y se venden 20 cuando el precio es de 60 *u.m.* ¿Cuál es la ecuación de la demanda?

Datos

$q_1 = 10,\ p_1 = 80$

$q_2 = 20,\ p_2 = 60$

Fórmula

$$p - p_1 = \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1}(q - q_1)$$

Al sustituir los datos se obtiene la ecuación:

$$2q + p - 100 = 0$$

Este ejemplo indica que mientras la cantidad de demanda aumenta el precio disminuye.

Definición

La línea recta es el lugar geométrico de los puntos del plano, de los cuales al tomar dos cualesquiera, el valor de la pendiente m siempre es constante.

Ecuaciones de la recta

Para determinar la ecuación de una recta en función de las condiciones dadas, se emplean las siguientes ecuaciones, según corresponda.

Ecuación general

Es aquella que se expresa de la siguiente manera:

$$Ax + By + C = 0$$

Donde: A, B y C son constantes.

Ecuación punto – pendiente

Dado el punto $P_1(x_1, y_1)$ de la recta de pendiente m, su ecuación es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Dados los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ de la recta, su ecuación es:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

EJEMPLOS

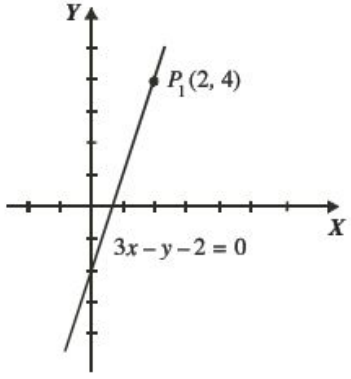
Ejemplos

1 ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto $P_1(2, 4)$ y tiene pendiente 3?

Solución

Se sustituyen los valores de $x_1 = 2$, $y_1 = 4$ y $m = 3$ en la ecuación:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 4 = 3(x - 2)$$
$$y - 4 = 3x - 6$$
$$-3x + y - 4 + 6 = 0$$
$$-3x + y + 2 = 0$$
$$3x - y - 2 = 0$$



Por consiguiente, la ecuación de la recta que pasa por el punto (2, 4) y tiene pendiente 3, es: $3x - y - 2 = 0$.

2 ¿Cuál es la ecuación de la recta que es perpendicular al eje X y que se encuentra a 5 unidades a la derecha del eje vertical?

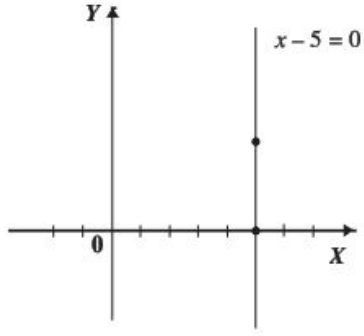
Solución

Las rectas perpendiculares al eje X tienen ecuación de la forma $x = x_1$, donde x_1 es la abscisa del punto de intersección de la recta con el eje horizontal.

La recta se encuentra a 5 unidades a la derecha del eje vertical, entonces sus puntos tienen coordenadas $(5, y_1)$, y al sustituir el valor de la abscisa en la ecuación se obtiene:

$$x = 5$$

$$x - 5 = 0$$



3 Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1(-1, 2)$ y $P_2(2, -5)$

Solución

Los valores de las abscisas y ordenadas se sustituyen en la ecuación:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 2 = \frac{-5 - 2}{2 - (-1)}(x - (-1))$$

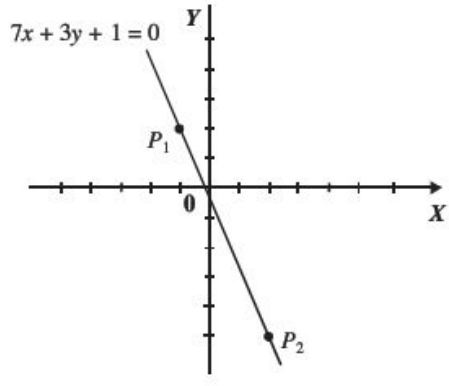
$$y - 2 = -\frac{7}{3}(x + 1)$$

$$3(y - 2) = -7(x + 1)$$

$$3y - 6 = -7x - 7$$

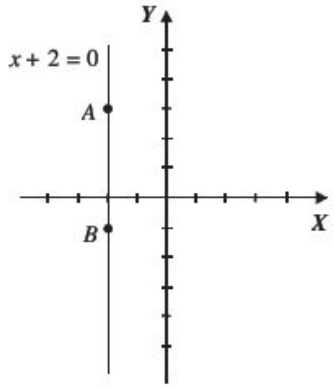
$$7x + 3y - 6 + 7 = 0$$

$$7x + 3y + 1 = 0$$



En consecuencia, la ecuación de la recta es: $7x + 3y + 1 = 0$.

4 ●●○ Una recta pasa por los puntos $A(-2, 3)$ y $B(-2, -1)$. Encuentra su ecuación.



Solución

Al sustituir en la fórmula $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, se determina que:

$$y - 3 = \frac{-1-3}{-2+2}(x-(-2))$$

$$y - 3 = -\frac{4}{0}(x+2)$$

La pendiente de la recta es de la forma $\frac{c}{0}$ (no está definido), por consiguiente, es perpendicular al eje X y su ecuación es de la forma:

$$x = x_1$$

Por tanto, su ecuación es:

$$x = -2$$

$$x + 2 = 0$$

Es decir, la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B es: $x + 2 = 0$.

5 ●●○ Determina los vértices del triángulo, cuyos lados están dados por las ecuaciones de las rectas:

$$3x + 7y - 13 = 0;\ x - y - 1 = 0;\ 7x + 3y + 23 = 0$$

Solución

Se combinan las rectas para formar tres sistemas de ecuaciones, los cuales se resuelven por cualquiera de los métodos conocidos:

Sistema de ecuaciones para el vértice A:

$$3x + 7y - 13 = 0$$
$$x - y - 1 = 0$$

Punto de intersección: $A(2, 1)$

Sistema de ecuaciones para el vértice B:

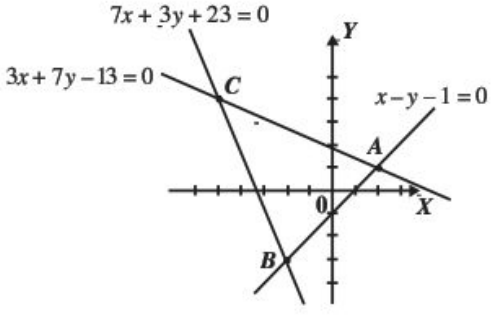
$$x - y - 1 = 0$$
$$7x + 3y + 23 = 0$$

Punto de intersección: $B(-2, -3)$

Sistema de ecuaciones para el vértice C:

$$3x + 7y - 13 = 0$$
$$7x + 3y + 23 = 0$$

Punto de intersección: $C(-5, 4)$



6 ●●● Si se compran 20 pantalones el precio unitario de la prenda es de $300, pero si se compran 50, entonces el costo de cada pantalón es de $280, encuentra la ecuación de la demanda.

Solución

Considerando:

x = número de pantalones $\qquad$ y = precio por pantalón

Se forman los siguientes pares coordenados:

$$(20, 300) \text{ y } (50, 280)$$

Se aplica la ecuación de la recta que pasa por dos puntos y se obtiene:

$$y - 300 = \frac{280 - 300}{50 - 20}(x - 20) \quad \rightarrow \quad y - 300 = -\frac{20}{30}(x - 20)$$

$$y - 300 = -\frac{2}{3}(x - 20)$$

Al transformar esta última ecuación a su forma general, obtiene la ecuación de la demanda:

$$2x + 3y - 940 = 0$$

7 ●●● Un resorte se deforma 2 centímetros bajo la acción de una fuerza de 15 newtons, si la fuerza se incrementa a 25 newtons, entonces se deforma $3\frac{1}{3}$ de centímetro, ¿cuál es la ecuación que representa la deformación que sufre el resorte en función de la fuerza?

Solución

Considere:

x = fuerza que actúa sobre el resorte $\qquad$ y = deformación

Se forma entonces la siguiente pareja de puntos:

$$(15, 2) \text{ y } \left(25, 3\frac{1}{3}\right)$$

Se aplica la ecuación de la recta que pasa por dos puntos y al convertir a su forma general se obtiene:

$$y - 2 = \frac{3\frac{1}{3} - 2}{25 - 15}(x - 15) \quad \rightarrow \quad y - 2 = \frac{\frac{10}{3} - 2}{10}(x - 15) \quad \rightarrow \quad y - 2 = \frac{\frac{4}{3}}{10}(x - 15)$$

$$y - 2 = \frac{2}{15}(x - 15)$$

$$15(y - 2) = 2(x - 15)$$

$$15y - 30 = 2x - 30$$

$$0 = 2x - 15y$$

Por consiguiente, la ecuación general de la deformación del resorte es: $2x - 15y = 0$.

EJERCICIO 14

Encuentra las ecuaciones generales de las rectas que satisfacen las siguientes condiciones:

1. Pasa por $(-3, 4)$ y $m = -\frac{2}{5}$
2. Pasa por $(0, 3)$ y $m = 2$
3. Pasa por $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$ y $m = 0$
4. Pasa por $\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ y $m = -1$
5. Pasa por $(-2, 1)$ y $(3, 4)$
6. Pasa por $(0, 2)$ y $(-3, -2)$
7. Pasa por $(3, -1)$ y $(3, 4)$
8. Pasa por $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$
9. Pasa por $(0, 1)$ y $\left(\frac{4}{3}, -1\right)$
10. Encuentra la ecuación general de la recta que pasa por $A(-1, 3)$ y tiene pendiente $-\frac{3}{5}$.
11. Una recta pasa por $(-1, 4)$ y desciende tres unidades por cada dos unidades que incrementa x. ¿Cuál es su ecuación general?
12. Obtén la ecuación general de la recta, cuya intersección con el eje X es 3 y su inclinación es de 120°.
13. Determina la ecuación general de la recta que pasa por el punto $A(6, -2)$ y tiene un ángulo de inclinación de 135°.
14. Encuentra la ecuación de la recta que es perpendicular al eje X y está a tres unidades a la derecha del eje vertical.
15. Encuentra la ecuación de la recta que es paralela al eje Y y está cuatro unidades a la izquierda del eje horizontal.
16. Los segmentos que una recta determina sobre los ejes X y Y, son 4 y -6, respectivamente. Determina su ecuación general.
17. Encuentra la ecuación general de la recta que pasa por el punto $A(2, -1)$ y determina sobre el eje X el segmento -2.
18. Los vértices de un cuadrilátero son $A(0, 0)$, $B(-1, 2)$, $C(3, 5)$ y $D(5, 0)$. Obtén las ecuaciones generales de sus lados.
19. ¿Cuál es la ecuación general de la recta, cuya pendiente es -2 y su intersección con el eje Y es 4?
20. Una recta pasa por el punto $A(7, 8)$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos $C(-2, 2)$ y $D(3, -4)$. Determina su ecuación general.
21. Demuestra que los puntos $A(-1, 2)$, $B(2, 4)$ y $C(5, 6)$ son colineales, mediante la ecuación de la recta que pasa por dos de estos puntos.

Con base al triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1, 2)$, $B(3, -1)$ y $C(-4, -5)$, realiza los ejercicios 22 al 27:

22. Obtén las ecuaciones generales de las rectas que pasan por los vértices y son paralelas a los lados opuestos.
23. Encuentra la ecuación general de la recta que pasa por el punto medio de A con B y es perpendicular al mismo lado.
24. Determina la ecuación general de la recta que pasa por el punto medio del $\overline{BC}$ y por el vértice A.
25. Obtén la ecuación general de la recta que pasa por el vértice C y es perpendicular al lado $\overline{AB}$.
26. ¿Cuáles son las ecuaciones generales de las rectas que pasan por el vértice B y trisecan al $\overline{AC}$?
27. Mediante las ecuaciones de línea recta, encuentra las coordenadas de los vértices del triángulo, cuyos puntos medios son los puntos A, B y C.
28. Las ecuaciones de los lados de un triángulo son:

$$x - 3y + 3 = 0;\ 2x + 7y + 6 = 0;\ 4x + y - 14 = 0$$

Determina las coordenadas de los vértices.

29. Las ecuaciones de los lados de un paralelogramo son:

$$x - 4y + 11 = 0;\ 2x + y + 4 = 0;\ x - 4y - 7 = 0;\ 2x + y - 14 = 0$$

Determina las coordenadas de sus vértices.

30. Un automóvil se mueve con velocidad constante y recorre 60 km en media hora, si ese mismo automóvil recorre 150 km en una hora con 15 minutos, encuentra la ecuación que relaciona la distancia y en kilómetros recorrida por el automóvil, en términos del tiempo x en horas.

31. La velocidad de una partícula en un tiempo de 2 segundos es de 5 metros por segundo y para un tiempo de 8 segundos se mueve a razón de 14 metros por segundo. Determina la ecuación que relaciona la velocidad de la partícula en función del tiempo.
32. Si el dueño de una papelería le compra a un proveedor 100 libretas, éste le da un precio de $12.50 cada una, pero si le compra 120, entonces el precio de cada libreta disminuye en ¢50, escribe la ecuación de la demanda.
33. Una empresa desea realizar una campaña publicitaria de un nuevo producto, para esto visita un taller de impresión y les informan que el costo de producir 15 millares de folletos publicitarios tienen un costo de $3 000, pero si desean 20 millares, el costo es de $3 600, obtén la ecuación de la recta que representa esta situación. (Considera x = número de millares; y = costo).
34. Una temperatura de 20°C equivale a 68°F, y 50°C equivalen a 122°F, determina la ecuación que relaciona la temperatura T_C en grados Celsius con la temperatura T_F en grados Fahrenheit.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Formas de la ecuación de una recta

Conocidas las condiciones que determinan una recta o su ecuación, éstas se expresan de las siguientes formas:

Ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen (forma ordinaria o reducida)

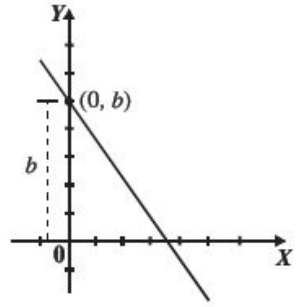
Una vez que se conoce la pendiente de una recta y su ordenada al origen (intersección con el eje Y), se determina la siguiente ecuación:

$$y = mx + b$$

Donde, *m:* pendiente

b: ordenada al origen

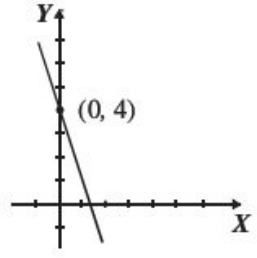
Esta forma de la ecuación de la recta, también se conoce como forma simplificada o reducida.



EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra la ecuación de la recta, cuya intersección con el eje Y es 4 y su pendiente -3.



Solución

Los datos son: $m = -3$ y $b = 4$, al sustituir se obtiene:

$$y = mx + b$$
$$y = -3x + 4$$
$$3x + y - 4 = 0$$

Finalmente, la ecuación es: $3x + y - 4 = 0$.

2 Determina la ecuación general de la recta que tiene pendiente $\frac{1}{2}$ y su intersección con el eje Y es el punto $(0, -5)$.

Solución

Los datos son: $m = \frac{1}{2}$ y $b = -5$, al sustituir en la ecuación ordinaria, se obtiene:

$$y = \frac{1}{2}x - 5$$ Al multiplicar por 2 para eliminar el denominador.

$$2y = x - 10$$ Al igualar a cero la ecuación, resulta: $x - 2y - 10 = 0$.

Transformación de la ecuación general a la forma ordinaria

Para transformar $Ax + By + C = 0$, a la forma $y = mx + b$, se procede de la siguiente manera:

Se despeja la variable y de:

$$Ax + By + C = 0$$

$$By = -Ax - C$$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Esta ecuación es de la forma pendiente–ordenada al origen.

Si se compara con la ecuación $y = mx + b$ se obtienen los valores de m y b, en términos de los coeficientes de la ecuación general:

$$m = -\frac{A}{B} \text{ y } b = -\frac{C}{B}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es la pendiente y la intersección con el eje Y de la recta $4x - 5y + 12 = 0$?

Solución

Despejando la variable y:

$$4x - 5y + 12 = 0 \quad \rightarrow \quad -5y = -4x - 12$$

$$y = \frac{-4}{-5}x - \frac{12}{-5}$$

$$y = \frac{4}{5}x + \frac{12}{5}$$

Por consiguiente, la ecuación en su forma pendiente–ordenada al origen es:

$$y = \frac{4}{5}x + \frac{12}{5}$$

De esta ecuación se determina la pendiente y el punto de intersección con el eje Y:

$$m = \frac{4}{5} \text{ y } \left(0, \frac{12}{5}\right)$$

2 Transforma a la forma simplificada la siguiente ecuación: $3x + 5y - 7 = 0$.

Solución

Se determinan los valores de A, B y C como sigue:

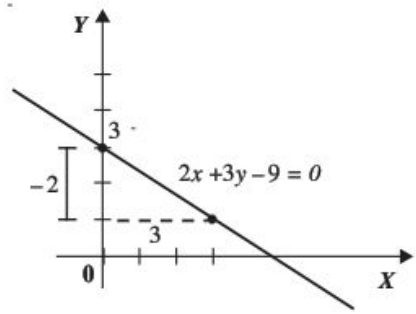
$$A = 3, B = 5 \text{ y } C = -7$$

Se sustituyen en $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, para obtener la forma simplificada:

$$y = -\frac{3}{5}x - \frac{-7}{5} \quad \rightarrow \quad y = -\frac{3}{5}x + \frac{7}{5}$$

3 ●●○ Emplea la forma ordinaria de la ecuación de la recta y grafica la siguiente recta:

$$2x + 3y - 9 = 0$$



Solución

Se transforma la ecuación propuesta a su forma ordinaria:

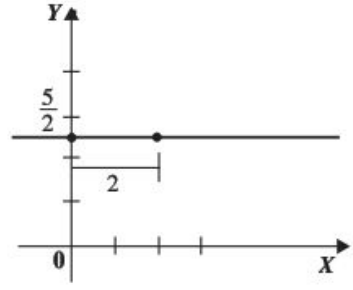
$$2x + 3y - 9 = 0$$
$$3y = -2x + 9$$
$$y = -\frac{2}{3}x + 3$$

Se obtiene:

La ordenada al origen es $b = 3$, significa que la recta corta al eje y 3 unidades por encima del origen.

La pendiente $m = -\frac{2}{3}$, significa que y disminuye 2 unidades y x aumenta tres.

4 ●●○ Grafica la recta de la ecuación $2y - 5 = 0$.



Solución

Se expresa la ecuación como:

$$0x + 2y - 5 = 0$$

Se despeja y de la ecuación y se obtiene:

$$y = \frac{0}{2}x + \frac{5}{2}$$

El valor de $b = \frac{5}{2}$

La pendiente es cero pero se expresa de manera equivalente como $m = \frac{0}{2}$ para poder graficar.

5 ●●○ Determina la ecuación general de la recta que pasa por el punto $A(-5, 3)$ y es perpendicular a la recta $3x + 2y - 6 = 0$.

Solución

La ecuación $3x + 2y - 6 = 0$ se expresa en su forma pendiente–ordenada al origen:

$$y = -\frac{3}{2}x + 3$$

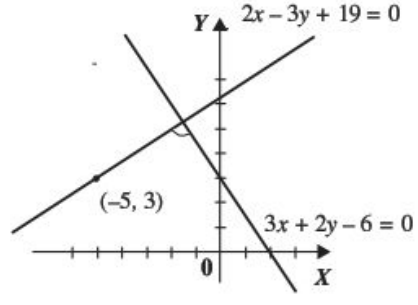
La pendiente de esta recta es: $m = -\frac{3}{2}$.

La recta perpendicular a ella que pasa por el punto $(-5, 3)$ cumple la condición: $m \cdot m' = -1$

$$-\frac{3}{2}m' = -1 \quad ; \quad m' = \frac{2(-1)}{-3} = \frac{2}{3}$$

Se sustituyen las coordenadas del punto y la pendiente m' en la ecuación:

$$y - y_1 = m'(x - x_1)$$
$$y - 3 = \frac{2}{3}(x - (-5))$$
$$3(y - 3) = 2(x + 5)$$
$$3y - 9 = 2x + 10$$
$$-2x + 3y - 9 - 10 = 0$$
$$-2x + 3y - 19 = 0$$



Finalmente, la ecuación de la recta es:

$$2x - 3y + 19 = 0$$

6 ●●· Una recta pasa por el punto (2, 3) y es paralela a la recta $x - 2y = 0$, ¿cuál es su ecuación general?

Solución

Se expresa la ecuación $x - 2y = 0$ en su forma pendiente ordenada al origen:

$$y = \frac{1}{2}x$$

La pendiente de esta recta es $m = \frac{1}{2}$, como la recta que se busca es paralela, entonces tiene la misma pendiente: $m' = m = \frac{1}{2}$.

Se sustituye el punto y la pendiente en la ecuación y se expresa en su forma general, obteniendo como resultado:

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2) \quad \rightarrow \quad x - 2y + 4 = 0$$

7 ●●· Para las rectas $x + 4y - 4 = 0$ y $2x - 3y + 6 = 0$, determina la medida del ángulo agudo que forman.

Solución

Se expresan las rectas en su forma ordinaria para obtener sus respectivas pendientes:

$$y = -\frac{1}{4}x + 1 \quad \rightarrow \quad m_1 = -\frac{1}{4} \qquad y = \frac{2}{3}x + 2 \quad \rightarrow \quad m_2 = \frac{2}{3}$$

Se sustituyen los valores de las pendientes en la fórmula de ángulo entre dos rectas:

$$\theta = arc\ tan\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}\right) = arc\ tan\left(\frac{\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{4}\right)}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)}\right) = arc\ tan\left(\frac{11}{10}\right) = 47°43'34''$$

Por tanto, el ángulo agudo que forman dichas rectas es de 47° 43′34″.

8 ●●· Un cuerpo tiene una velocidad de 4 metros por segundo, después de 6 segundos, su velocidad es de 12 metros por segundo. Expresa la velocidad de dicho cuerpo en función del tiempo, obtén su velocidad para un tiempo de 9 segundos y traza la gráfica.

Solución

Este problema relaciona a la velocidad v con el tiempo t, por tanto, los pares ordenados son de la forma: (t, v).

Por consiguiente, los pares ordenados son: (0, 4) y (6, 12).

Se aplica la ecuación de la recta que pasa por dos puntos y se despeja v:

$$v - v_1 = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}(t - t_1) \quad \rightarrow \quad v - 4 = \frac{12 - 4}{6 - 0}(t - 0) \quad \rightarrow \quad v = \frac{4}{3}t + 4$$

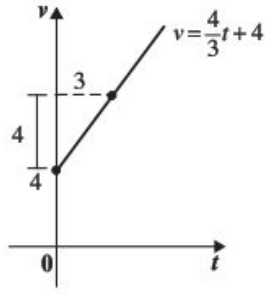
Se obtiene que $m = \frac{4}{3}$ y $b = 4$, la pendiente de la recta representa la aceleración del cuerpo y la ordenada al origen su velocidad inicial.

La velocidad del cuerpo en $t = 9\ s$, se obtiene al sustituir este valor en la ecuación:

$$v = \frac{4}{3}t + 4 \quad \rightarrow \quad v = \frac{4}{3}(9) + 4$$

$$v = 16\frac{m}{s}$$

La representación gráfica del problema es:



Por tanto, para 9 segundos, la velocidad del cuerpo es de $16\frac{m}{s}$.

9 ●●○ Cierta empresa se dedica a fabricar bolsas de plástico, el costo de fabricación de x número de ellas es de $C = 4x + 3\,200$. Los ingresos por la venta de las bolsas fabricadas están dados por la ecuación $I = 12x$.

a) ¿Cuál es el costo de producción de 1 500 bolsas?
b) Si se fabrican 1 000 bolsas, ¿de cuánto es la utilidad?
c) ¿Cuántas bolsas se deben fabricar para que la utilidad sea nula?
d) Construye la gráfica que muestre la ecuación de costos e ingresos.

Solución

a) Se sustituye el valor de $x = 1\,500$ en la ecuación de costos:

$C = 4x + 3\,200$ $\qquad C = 4(1\,500) + 3\,200$
$= 6\,000 + 3\,200$
$= 9\,200$

por consiguiente, producir 1 500 bolsas tiene un costo de $9 200.

b) La ecuación de utilidad resulta de la diferencia de la ecuación de ingresos y costos.

$U = I - C \qquad U = 12x - (4x + 3\,200) \qquad U = 8x - 3\,200$

Para $x = 1\,000$ se obtiene:

$U = 8(1\,000) - 3\,200$
$= 8\,000 - 3\,200$
$= 4\,800$

Finalmente, la utilidad que genera la venta de 1 000 bolsas es de $4 800.

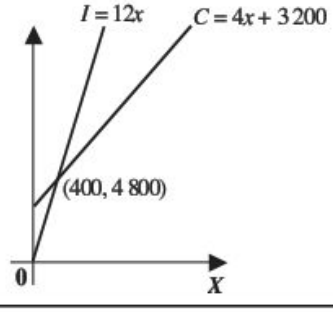
c) El número de bolsas que deben fabricarse y venderse para que la utilidad sea nula es:

$U = 8x - 3\,200 \qquad 0 = 8x - 3\,200 \qquad -8x = -3\,200$

$x = \frac{-3200}{-8}$
$x = 400$

Para que la utilidad sea nula se deben fabricar y vender 400 bolsas.

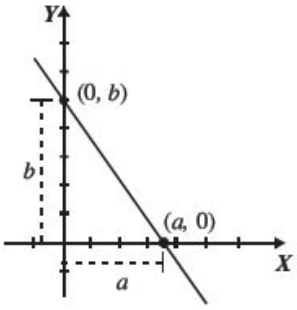
d) La representación gráfica es:



Ecuación de la recta en su forma simétrica

Una recta cuyas intersecciones con los ejes X y Y son a y b con $a \neq 0$ y $b \neq 0$ se representa por:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$



Donde:

- a: abscisa al origen
  (Representa la intersección con el eje X)
- b: ordenada al origen
  (Representa la intersección con el eje Y)

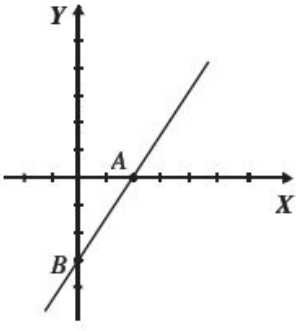
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra la ecuación general de la recta, cuyas intersecciones con los ejes son los puntos $A(2, 0)$ y $B(0, -3)$.

Solución

En este caso $a = 2$ y $b = -3$, entonces al sustituir en la forma simétrica, se obtiene:



$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}=1$$

$$6\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}=1\right)$$ Se multiplica por 6 la ecuación para eliminar los denominadores

$$3x-2y=6$$

$$3x-2y-6=0$$

Por tanto, la ecuación general de la recta es: $3x - 2y - 6 = 0$.

2 Determina la ecuación general de la recta, cuyas intersecciones con los ejes son los puntos $(-1, 0)$ y $(0, 5)$.

Solución

En este caso, $a = -1$ y $b = 5$, entonces:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \rightarrow \frac{x}{-1}+\frac{y}{5}=1$$ Se multiplica por 5 ambos miembros

$$-5x+y=5$$ Se acomodan los términos

$$5x-y+5=0$$

Por consiguiente, la ecuación general de la recta es: $5x - y + 5 = 0$.

Transformación de la ecuación general a la forma simétrica

Para transformar la ecuación $Ax + By + C = 0$ a la forma $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, se realizan los siguientes pasos:

$$Ax+By+C=0$$

$$Ax+By=-C$$ El término independiente se pasa al segundo miembro.

$$\frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=\frac{-C}{-C}$$ Se divide la expresión por el término independiente.

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1$$ Se obtiene que $a=-\frac{C}{A}$ y $b=-\frac{C}{B}$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Transforma a la forma simétrica y determina las intersecciones con los ejes de la recta:

$$2x + 3y - 6 = 0$$

Solución

La ecuación está en la forma general, al comparar con $Ax + By + C = 0$, se obtienen los valores de A, B y C, éstos son:

$$A = 2,\ B = 3 \text{ y } C = -6$$

Para encontrar las intersecciones se sustituye en:

$$a = -\frac{C}{A} \text{ y } b = -\frac{C}{B}$$

Entonces,

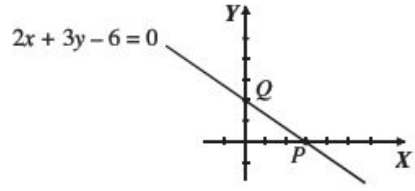
$$a = -\frac{(-6)}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ y } b = -\frac{(-6)}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

En consecuencia, la ecuación en su forma simétrica es: $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$.

Las intersecciones con los ejes son:

con el eje X el punto: $P(3, 0)$ con el eje Y el punto: $Q(0, 2)$

Al graficar y unir estos puntos en el plano cartesiano, se obtiene la gráfica de la ecuación $2x + 3y - 6 = 0$.



2 Una recta pasa por los puntos (2, 5) y (– 1, 4). Expresa su forma simétrica.

Solución

Primero se sustituyen los puntos en la ecuación para encontrar la ecuación general:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \rightarrow \quad y - 5 = \frac{4 - 5}{-1 - 2}(x - 2)$$

$$y - 5 = \frac{1}{3}(x - 2)$$

$$3(y - 5) = 1(x - 2)$$

$$3y - 15 = x - 2$$

$$-x + 2 + 3y - 15 = 0$$

$$-x + 3y - 13 = 0$$

$$x - 3y + 13 = 0$$

Esta ecuación se encuentra en su forma general y los valores de A, B y C, son:

$$A = 1,\ B = -3 \text{ y } C = 13$$

Al sustituir en $a = -\frac{C}{A}$ y $b = -\frac{C}{B}$, se determina que:

$$a = \frac{-13}{1} = -13 \text{ y } b = \frac{-13}{-3} = \frac{13}{3}$$

Finalmente, la ecuación de la recta en la forma simétrica es:

$$\frac{x}{-13} + \frac{y}{\frac{13}{3}} = 1$$

3 Transforma la ecuación general de la recta $2x + 5y - 12 = 0$ a su forma simétrica.

Solución

$$2x + 5y - 12 = 0 \quad \rightarrow \quad 2x + 5y = 12$$

$$\frac{2x}{12} + \frac{5y}{12} = \frac{12}{12}$$

$$\frac{\frac{2x}{2}}{\frac{12}{2}} + \frac{\frac{5y}{5}}{\frac{12}{5}} = 1$$

Forma simétrica: $\frac{x}{6} + \frac{y}{\frac{12}{5}} = 1$

EJERCICIO 15

Transforma a la forma ordinaria y simétrica las siguientes ecuaciones:

1. $x + y - 4 = 0$
2. $2x - 5y + 5 = 0$
3. $x - 3y + 8 = 0$
4. $2x - y = 0$
5. $x + 8y = 4$
6. $-3x + 4y = -12$
7. $3x + 5y - 10 = 0$
8. $\frac{1}{2}x + 3y + 5 = 0$
9. $-\frac{2}{5}x + \frac{1}{3}y = 4$
10. $x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega - p = 0$

Grafica las siguientes ecuaciones:

11. $y = -3x + 1$
12. $y = 2x - 3$
13. $y = -\frac{3}{4}x + 1$
14. $y = \frac{2}{3}x$
15. $4x - y - 2 = 0$
16. $x + 3y - 5 = 0$
17. $x - y = 0$
18. $\frac{3}{2}x + 3y - 6 = 0$

19. Determina la ecuación de la recta, cuya ordenada al origen es -5 y su inclinación es de 135°.
20. Una recta de pendiente 2 pasa por el punto $A(-1,2)$. Expresa su ecuación en la forma ordinaria.
21. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(6, -7)$ y tiene pendiente -3 en su forma ordinaria?
22. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(1, 2)$ y $B(-5, 3)$ en su forma ordinaria.
23. Una recta tiene intersecciones con los ejes en los puntos $A(-1, 0)$ y $B(0, 5)$. Obtén su ecuación en su forma ordinaria.
24. Una recta pasa por el punto $(-1, 5)$ y es paralela a la recta con ecuación $5x - 3y + 7 = 0$. ¿Cuál es su ecuación?
25. Determina la ecuación general de la recta que pasa por el punto $(2, 7)$ y es perpendicular a la recta con ecuación $x - 4y + 7 = 0$.
26. Obtén la ecuación general de la recta que pasa por el punto $A(2, 3)$ y es paralela a la recta $x - y + 2 = 0$.
27. ¿Cuál es la ecuación de la recta perpendicular que pasa por el punto medio de las intersecciones con los ejes de la recta $2x - 3y + 6 = 0$?
28. Determina la ecuación general de la recta perpendicular a la recta $2x + 3y - 7 = 0$ y pasa por la intersección de las rectas $x + y - 7 = 0$ y $2x - 3y + 1 = 0$.

29. Encuentra la medida del ángulo obtuso formado por las rectas:

$$x + 3y - 6 = 0 \text{ y } 2y - 3 = 0$$

30. Los lados de un triángulo están formados por las rectas:

$$x - 6y + 15 = 0;\ 5x + 2y - 21 = 0;\ x + 2y - 1 = 0$$

¿Cuál es la medida de sus ángulos interiores?

31. La posición de una partícula está dada por la expresión:

$$y = \frac{3}{4}x - 2$$

Donde x e y están dados en metros, ¿cuál es su posición cuando $x = 20\ m$?

32. Un fabricante de pantalones tiene gastos fijos de $30 000 mensuales y por cada pantalón elaborado invierte $50 más.

a) ¿Cuál es la ecuación de gastos del fabricante?

b) ¿Cuánto invierte en la producción de 800 pantalones?

(Considera x = número de pantalones fabricados, y = gasto total)

33. Para un tiempo de 5 segundos, un cuerpo posee una velocidad de $3\frac{m}{s}$, y para 8 segundos su velocidad es de $15\frac{m}{s}$.

a) ¿Cuál es su aceleración?

b) ¿Qué velocidad tendrá para un tiempo de 12 segundos?

34. Un restaurante debe invertir diariamente $6 000 en gastos fijos, más $30 por cada comida servida, si todos los platillos servidos tienen un precio al público de $80, obtén:

a) La función de costo total del restaurante por día.

b) ¿Cuál es la utilidad obtenida, si vende en un día 140 platillos?

c) Si sólo vende 90 platillos, ¿obtiene ganancias?

d) ¿Cuántos platillos debe vender para que no exista utilidad?

35. Representa la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(3, -2)$ y tiene un ángulo de inclinación de 45° en su forma simétrica.

36. Una recta tiene pendiente $\frac{1}{2}$ y su intersección con el eje Y es -4. Representa su ecuación en la forma simétrica.

37. Una recta pasa por los puntos $A(-3, 1)$ y $B(2, -2)$. Encuentra su ecuación en la forma simétrica.

38. Obtén la ecuación de la recta en su forma simétrica si pasa por la intersección con el eje Y de la recta $x + 2y - 7 = 0$ y es perpendicular a la misma.

39. Determina la ecuación de la recta en su forma simétrica si pasa por la intersección de las rectas, $2x + y - 5 = 0$ y $3x - 4y - 2 = 0$, y es paralela a la recta que pasa por los puntos $(-1, 1)$ y $(3, 6)$.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Familia de rectas

Se denomina familia de rectas al conjunto de rectas que satisfacen una condición geométrica; se clasifican en:

Rectas paralelas

Satisfacen la condición $y = mx + b$, donde b es el parámetro. Este tipo de rectas tienen la misma pendiente.

Ejemplo

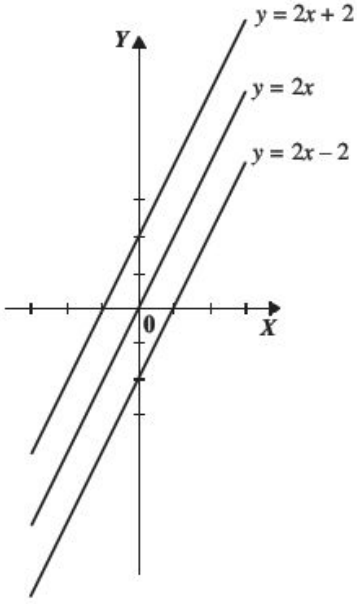
Representa gráficamente la familia de rectas, $y = 2x + b$, con $b = -2, 0, 2$.

Solución

Se sustituyen los valores del parámetro b en la ecuación y se obtienen las siguientes rectas:

$$y = 2x - 2,\ y = 2x,\ y = 2x + 2$$

Cuya representación gráfica es:



Rectas concurrentes

Satisfacen la condición $y = mx + b$, donde m es el parámetro; esto es, las rectas coinciden en la intersección con el eje Y.

Ejemplo

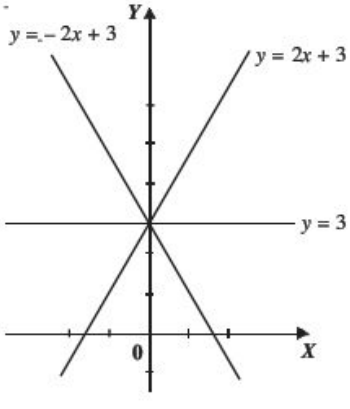
Representa gráficamente la familia de rectas, $y = mx + 3$, con $m = -2, 0, 2$.

Solución

Se sustituyen los valores de m y se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$y = -2x + 3,\ y = 3,\ y = 2x + 3$$

Cuya representación gráfica es:



EJERCICIO 16

Representa gráficamente las siguientes familias de rectas:

1. $y=\frac{1}{2}x+b$
2. $y = mx + 1$
3. $y=-\frac{2}{3}x+b$
4. $y=mx-\frac{1}{2}$
5. $y = x + b$
6. $y = mx$
7. $y = -2x + b$
8. $y=mx+\frac{4}{3}$
9. $y = mx - 1$
10. $y=-\frac{4}{5}x+b$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuación de la recta en su forma normal

Sea $\overline{OP_1}$ un segmento perpendicular a la recta $Ax + By + C = 0$ de longitud p, y ω el ángulo determinado por el segmento y el eje X.

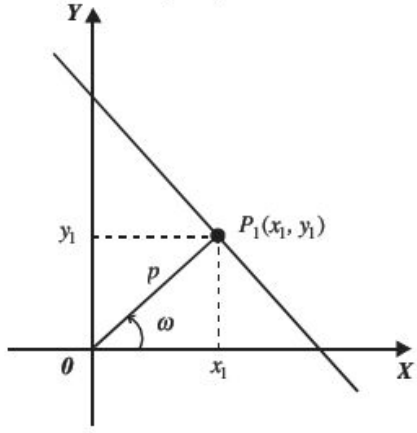
De la figura se obtiene:

$$sen\ \omega = \frac{y_1}{p} \rightarrow y_1 = p\ sen\ \omega$$

$$cos\ \omega = \frac{x_1}{p} \rightarrow x_1 = p\ cos\ \omega$$

Luego, la pendiente del segmento $\overline{OP_1}$ es:

$$m = tan\ \omega = \frac{y_1}{x_1} = \frac{p\ sen\ \omega}{p\ cos\ \omega} = \frac{sen\ \omega}{cos\ \omega}$$



Entonces, las coordenadas de P_1 son $(p\ cos\ \omega, p\ sen\ \omega)$ y la pendiente, de la recta:

$Ax + By + C = 0$ es:

$$m = \frac{cos\ \omega}{sen\ \omega}$$

Al sustituir P_1 y m en la ecuación de la recta punto pendiente se obtiene la ecuación de la recta en su forma normal:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad \rightarrow \qquad y - p\ sen\ \omega = \frac{cos\ \omega}{sen\ \omega}(x - p\ cos\ \omega)$$

$$y\ sen\ \omega - p\ sen^2\ \omega = -x\ cos\ \omega + p\ cos^2\ \omega$$

$$x\ cos\ \omega + y\ sen\ \omega - p\ sen^2\ \omega - p\ cos^2\ \omega = 0$$

$$x\ \cos\ \omega + y\ sen\ \omega - p(sen^2\ \omega + cos^2\ \omega) = 0$$

Pero $sen^2\omega + cos^2\omega = 1$, entonces:

$$x\ cos\ \omega + y\ sen\ \omega - p = 0$$

Se concluye que una recta en su forma general $Ax + By + C = 0$, se puede expresar en su forma normal como:

$$x\ cos\ \omega + y\ sen\ \omega - p = 0$$

Donde:

p: longitud del segmento $\overline{OP_1}$ y ω: ángulo de inclinación del segmento de recta que parte del origen, perpendicular a la recta normal.

Transformación de la ecuación general a la forma normal

Sean $Ax + By + C = 0$ y $x\ cos\ \omega + y\ sen\ \omega - p = 0$, las ecuaciones de una misma recta en su forma general y normal, respectivamente, entonces los coeficientes de ambas ecuaciones son iguales o proporcionales, por tanto:

$$\frac{cos\ \omega}{A} = \frac{sen\ \omega}{B} = \frac{p}{C}, \text{ con } K = \frac{p}{C}$$

Entonces, K es la constante de proporcionalidad y en estas condiciones:

$$cos\ \omega = K\,A \qquad sen\ \omega = K\,B \qquad -p = K\,C$$

Al elevar al cuadrado y sumar las dos primeras igualdades se determina que:

$$cos^2\ \omega + sen^2\ \omega = K^2\,A^2 + K^2\,B^2 = K^2(A^2 + B^2)$$

$$1 = K^2(A^2 + B^2)$$

$$\frac{1}{A^2 + B^2} = K^2$$

$$K = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Con $r = \pm\sqrt{A^2 + B^2}$ (radical).

Los valores de $cos\ \omega$, $sen\ \omega$ y p están dados por:

$$cos\ \omega = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}};\ sen\ \omega = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ y } p = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Por consiguiente, la forma normal de $Ax + By + C = 0$ es:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

Los signos de r (radical) se consideran de la siguiente manera:

Si $C \neq 0$, entonces el radical tendrá signo opuesto al de C.

Si $C = 0$, el signo del radical se considerará igual al de B.

Si $C = B = 0$, el signo del radical tendrá igual signo que A.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Reduce a la forma normal la siguiente ecuación de la recta $\sqrt{3}x+y-9=0$ y determina el valor de p y del ángulo ω.

Solución

La forma normal de $Ax+By+C=0$ es:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

Se obtienen los coeficientes de la recta:

$$A=\sqrt{3}\,,\ B=1 \text{ y } C=-9$$

Luego, con los valores de A y B se obtiene el radical $\sqrt{A^2+B^2}$

$$\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$$

Como C es negativa, entonces $\sqrt{A^2+B^2}$ se toma con signo positivo, por consiguiente, la ecuación en su forma normal es:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{9}{2}=0$$

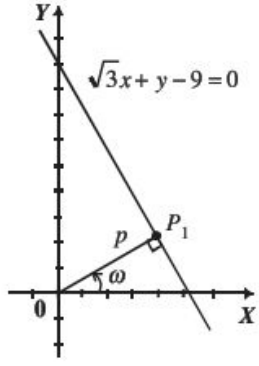
De aquí se obtiene:

$$cos\ \omega=\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\ sen\ \omega=\frac{1}{2}\ \text{y}\ p=\frac{9}{2}$$

Como *sen* ω y *cos* ω son ambos positivos; ω está en el primer cuadrante, entonces los valores de p y ω están determinados por:

$$p=\frac{9}{2}\ \text{y}\ \omega=30°$$

Gráficamente se representa como:



Donde: $p=\frac{9}{2}$ y $\omega=30°$ y la ecuación en su forma normal es:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{9}{2}=0$$

2 ●●· Reduce a la forma normal la siguiente ecuación de la recta $3x - 4y - 6 = 0$ y encuentra el valor de p y ω.

Solución

Con el valor de los coeficientes $A = 3$, $B = -4$ y $C = -6$, se obtiene el radical:

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Debido a que C es negativo, entonces $\sqrt{A^2 + B^2}$ es positivo, por tanto, la ecuación normal se expresa de la siguiente forma:

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{6}{5} = 0$$

De esta ecuación se determina que:

$$cos\ \omega = \frac{3}{5},\ sen\ \omega = -\frac{4}{5}\ \text{y}\ p = \frac{6}{5}$$

Luego, para obtener el ángulo se despeja w de cualquiera de las dos funciones trigonométricas:

$$sen\ \omega = -\frac{4}{5} \rightarrow \omega = arc\ sen\left(-\frac{4}{5}\right)$$

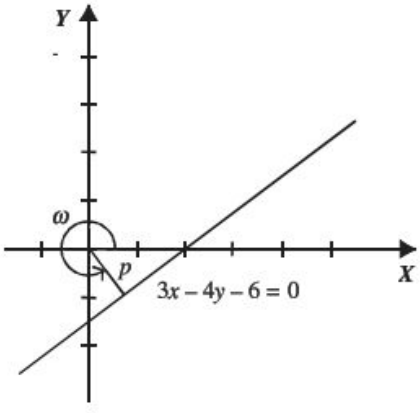
$$\omega = arc\ sen\ (-0.8) = -53°\ 7'$$

Como $cos\ \omega$ es positivo y $sen\ \omega$ es negativo, ω está en el cuarto cuadrante, por tanto:

$$\omega = 360° - 53°\ 07'$$

$$\omega = 306°\ 53'$$

Gráfica:



Donde: $p = \frac{6}{5}$ y $\omega = 306°\ 53'$ y la ecuación en su forma normal es:

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{6}{5} = 0$$

EJERCICIO 17

Expresa en su forma normal las siguientes rectas:

1. $2x + 3y - 5 = 0$
2. $x - y + 5 = 0$
3. $5x + 3y = 0$
4. $x - 3y + 7 = 0$
5. $12x + 5y = -13$
6. $\sqrt{5}x + 2y - 1 = 0$

Determina la ecuación de la recta en su forma normal si se conoce w y p.

7. $\omega = 30°$ y $p = 4$
8. $\omega = 45°$ y $p = \sqrt{2}$
9. $\omega = 60°$ y $p = 3$
10. $\omega = 120°$ y $p = 1$
11. $\omega = 180°$ y $p = \sqrt{3}$
12. $\omega = 150°$ y $p = 5$
13. $\omega = 225°$ y $p = 3\sqrt{2}$
14. $\omega = 300°$ y $p = 4\sqrt{3}$
15. Una recta es tangente a un círculo con centro en el origen y radio 2. Si el punto de tangencia es $(1, -\sqrt{3})$, ¿cuál es la ecuación de la recta en su forma normal?
16. ¿Cuál es la ecuación de la recta en forma normal, que pasa por el punto $A(1, 2)$ y es paralela a la recta $2x + 5y - 10 = 0$?
17. Expresa la ecuación de la recta $3x + ky + 7 = 0$ en su forma normal, cuando pasa por el punto $(-3, 2)$.
18. Encuentra la medida de los ángulos formados por las rectas con ecuaciones:

$$x \cos 330° + y \operatorname{sen} 330° - 1 = 0$$

$$x \cos 210° + y \operatorname{sen} 210° - 2 = 0$$

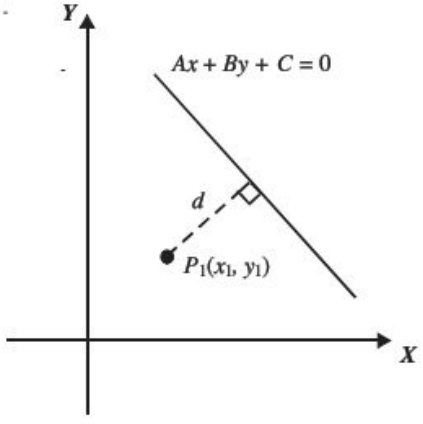
19. Determina la ecuación de la recta, cuya distancia al origen es $\frac{12}{5}$ u y pasa por el punto $A(0, -3)$.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Distancia de un punto a una recta

Es la longitud del segmento perpendicular a la recta trazado a partir del punto.

La distancia del punto $P_1(x_1, y_1)$ a la recta $Ax + By + C = 0$, está determinada por la fórmula:



$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra la distancia del punto $A(3, 2)$ a la recta $6x - 2y + 11 = 0$.

Solución

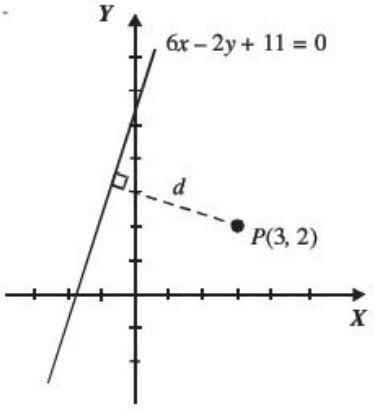
Se sustituyen las coordenadas del punto A y los coeficientes de la ecuación en la fórmula:

$$d = \frac{|6(3)-2(2)+11|}{\sqrt{(6)^2+(-2)^2}} = \frac{|18-4+11|}{\sqrt{36+4}}$$

$$= \frac{|25|}{\sqrt{40}}$$

$$= \frac{|25|}{\sqrt{4(10)}}$$

$$= \frac{25}{2\sqrt{10}}$$



Finalmente, la distancia es: $\frac{25}{2\sqrt{10}} = \frac{5}{4}\sqrt{10}u$.

2 ¿Cuál es la longitud de la altura de un triángulo, cuyos vértices son los puntos $A(1, -2)$, $B(7, 0)$ y $C(3, 3)$, del vértice A sobre el lado $\overline{BC}$?

Solución

Se determina la ecuación de la recta que pasa por los vértices B y C:

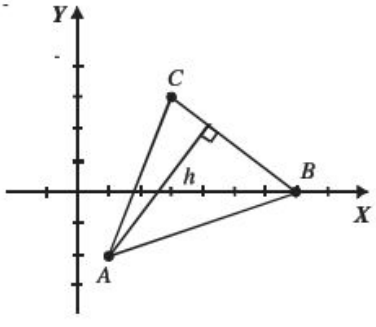
$$y - 0 = \frac{3-0}{3-7}(x-7)$$

$$y = -\frac{3}{4}(x-7)$$

$$4y = -3(x-7)$$

$$4y = -3x + 21$$

$$3x + 4y - 21 = 0$$



La longitud de la altura es la distancia que existe del vértice $A(1, -2)$ a la recta $3x + 4y - 21 = 0$, entonces, al sustituir en la fórmula se obtiene:

$$h = \frac{|3(1)+4(-2)-21|}{\sqrt{(3)^2+(4)^2}} = \frac{|3-8-21|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|-26|}{5} = \frac{26}{5} = 5.2u$$

Por consiguiente, la altura es de $5.2u$.

3 ●●○ Encuentra el área del triángulo formado por los puntos $A(-2, 3)$, $B(1, -1)$ y $C(3, 4)$.

Solución

Se determina la ecuación de uno de los lados, en este caso $\overline{AB}$.

$$y-3=\frac{-1-3}{1-(-2)}(x-(-2))\rightarrow y-3=\frac{-4}{3}(x+2)\rightarrow 3y-9=-4x-8\rightarrow 4x+3y-1=0$$

La longitud de la altura es la distancia del punto $C(3, 4)$ a la recta $4x + 3y - 1 = 0$

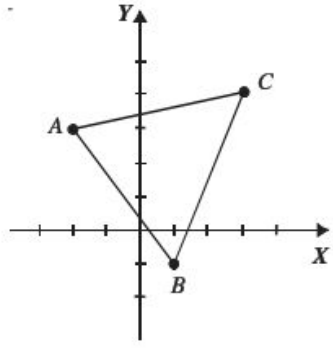
$$h=\frac{|4(3)+3(4)-1|}{\sqrt{(4)^2+(3)^2}}=\frac{|12+12-1|}{\sqrt{16+9}}=\frac{|23|}{5}=\frac{23}{5}$$

La base del triángulo es la longitud del lado $\overline{AB}$.

$$\overline{AB}=\sqrt{(1-(-2))^2+(-1-3)^2}=\sqrt{9+16}=5$$

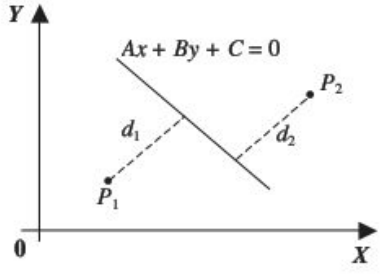
Entonces, el área del triángulo es:

$$A=\frac{1}{2}bh=\frac{1}{2}(5)\left(\frac{23}{5}\right)=\frac{23}{2}u^2$$



Distancia dirigida.

La distancia dirigida permite conocer la localización de un punto con respecto a una recta y al origen.



$$d=\pm\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Casos:

Si la recta no pasa por el origen:

- La distancia que existe del punto a la recta es positiva si el punto y el origen se encuentran en regiones opuestas respecto a la recta.
- Si el punto y el origen se encuentran en la misma región respecto a la recta, entonces se toma el signo negativo para indicar el sentido en el que se está tomando la distancia.

Si la recta pasa por el origen:

- La distancia del punto a la recta es positiva si el punto se encuentra por encima o en la región de arriba respecto a la recta.
- Si el punto se encuentra por debajo o en la región de abajo respecto a la recta, entonces se toma el signo negativo para indicar el sentido en el que se está tomando la distancia.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es la distancia dirigida que existe del punto $P(3, -1)$ a la recta $3x - 2y - 6 = 0$?

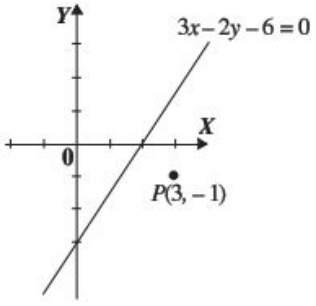
Solución

Se grafican la recta y el punto:

Se observa que el punto P y el origen se encuentran en regiones opuestas respecto a la recta, por consiguiente, la distancia es positiva e igual a:

$$d = \frac{|3(3) - 2(-1) - 6|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}}$$

$$d = \frac{|5|}{\sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{13}}{13}u$$



2 Determina la distancia dirigida del punto $Q(-4, -2)$ a la recta $x + 4y = 0$.

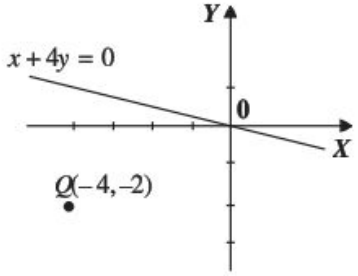
Solución

Se determina la posición del punto respecto a la recta:

El punto Q se encuentra por debajo de la recta, por tanto, la distancia dirigida es negativa e igual a:

$$d = -\frac{|-4 + 4(-2)|}{\sqrt{1^2 + 4^2}}$$

$$d = -\frac{|-12|}{\sqrt{17}} = -\frac{12}{\sqrt{17}} = -\frac{12\sqrt{17}}{17}u$$



3 ●●○ Determina la ecuación de la recta que dista 2 unidades de la recta $4x + 3y - 6 = 0$.

Solución

Existen dos rectas paralelas a $4x + 3y - 6 = 0$, una se encuentra arriba y la otra abajo, se sustituyen los datos en la fórmula:

$$d = \frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad \rightarrow \qquad 2 = \frac{4x + 3y - 6}{\pm\sqrt{4^2 + 3^2}}$$

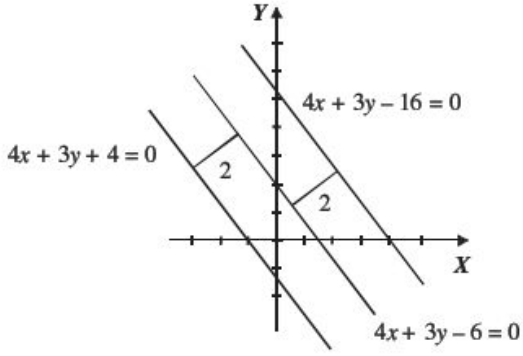
De la última ecuación se obtienen las ecuaciones de las rectas paralelas:

$$2 = \frac{4x + 3y - 6}{5} \qquad\qquad 2 = \frac{4x + 3y - 6}{-5}$$

$$10 = 4x + 3y - 6 \qquad\qquad -10 = 4x + 3y - 6$$

$$4x + 3y - 16 = 0 \qquad\qquad 4x + 3y + 4 = 0$$

Gráficamente se representan de la siguiente manera:



Distancia entre rectas paralelas

Para calcular la distancia entre dos rectas paralelas, se determina un punto en cualquiera de las rectas, después se calcula la distancia de ese punto a la otra recta.

Ejemplo

Encuentra la distancia entre las rectas paralelas $2x + 3y + 1 = 0$ y $2x + 3y - 6 = 0$.

Solución

La pendiente de ambas rectas es igual a $-\frac{2}{3}$, por tanto son paralelas.

Se determina un punto cualquiera sobre la recta $2x + 3y - 6 = 0$

$$\text{Si } x = 0,\ 2(0) + 3y - 6 = 0$$

$$3y - 6 = 0$$

$$3y = 6$$

$$y = \frac{6}{3}$$

$y = 2$, se obtiene el punto $(0, 2)$

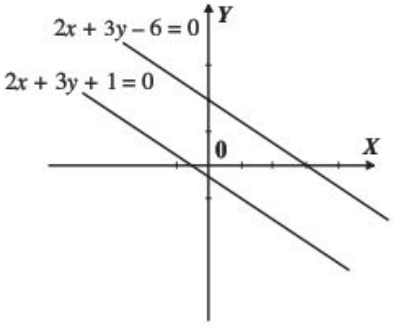
Se aplica la fórmula para obtener la distancia del punto (0, 2) a la recta $2x + 3y + 1 = 0$:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|(2)(0)+(3)(2)+1|}{\sqrt{(2)^2 + (3)^2}} = \frac{|0+6+1|}{\sqrt{4+9}} = \frac{7}{\sqrt{13}}$$

Al racionalizar el denominador:

$$\frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{7}{\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{\left(\sqrt{13}\right)^2} = \frac{7\sqrt{13}}{13}$$

De acuerdo con lo anterior la distancia entre las rectas es: $\frac{7\sqrt{13}}{13}$ unidades.



EJERCICIO 18

Determina la distancia del punto dado a la recta indicada:

1. $P(1, 4)$; $2x - 7y + 3 = 0$
2. $P(-2, 5)$; $3x + 4y - 5 = 0$
3. $P(0, -4)$; $x + y - 6 = 0$
4. $P(-1, 7)$; $12x + 5y + 26 = 0$
5. $P(3, 0)$; $x - y + 4 = 0$
6. $P(-4, 0)$; $x + 3 = 0$
7. $P(-2, -5)$; $x + 4y - 10 = 0$
8. $P(-3, -7)$; $y - 3 = 0$
9. Encuentra la altura correspondiente al lado $\overline{BC}$ del triángulo, cuyos vértices son los puntos $A(-3, 2)$, $B(5, 8)$ y $C(1, -4)$.
10. ¿Cuál es el área del triángulo, cuyos vértices son los puntos $A(0, 0)$, $B(2, 4)$ y $C(6, 7)$?
11. Una circunferencia tiene su centro en (2, 3) y es tangente a la recta $3x + 4y - 25 = 0$. Determina el radio de la circunferencia.
12. Obtén el valor de k para que la distancia de la recta $x + ky - 5 = 0$ al punto (3, 2) sea igual a $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Encuentra la distancia dirigida del punto dado a la recta indicada:

13. $P(2, -1)$; $2x - 3y - 5 = 0$
14. $P(-3, 2)$; $3x + 4y + 7 = 0$
15. $P(-2, 5)$; $3x + 4y = 0$
16. $P\left(3, -\frac{1}{2}\right)$; $5x + 2y - 3 = 0$
17. $P\left(\frac{1}{3}, -\frac{3}{4}\right)$; $6x + 8y - 3 = 0$
18. $P\left(-5, -\frac{3}{4}\right)$; $x + y - 1 = 0$
19. ¿Cuáles son las ecuaciones de las rectas paralelas a $3x - 4y + 5 = 0$ y que se encuentran a tres unidades de distancia?

20. La distancia dirigida de $P(-2, y)$ a la recta con ecuación $x + 4y - 5 = 0$, es 4 unidades. Encuentra la ordenada de P.
21. ¿Qué distancia existe entre las rectas paralelas $2x + y - 6 = 0$ y $2x + y + 1 = 0$?
22. Obtén la distancia que existe entre las rectas paralelas $x - 2y + 5 = 0$ y $3x - 6y + 4 = 0$.
23. ¿Cuál es la ecuación de la recta paralela a $x - y - 3 = 0$, y que dista 3 unidades de ella?
24. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por $(2, 3)$ y que la distancia de esta recta al punto $(-2, 3)$ sea igual a $\frac{8\sqrt{5}}{5}$.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Rectas notables en el triángulo

En todo triángulo se trazan las siguientes rectas:

Mediatriz

Recta perpendicular a un segmento que pasa por su punto medio. En un triángulo el punto de intersección de las mediatrices se conoce como *circuncentro*.

Ejemplo

¿Cuál es la ecuación de la mediatriz del segmento cuyos extremos son los puntos $A(-3, 0)$ y $B(1, 1)$?

Solución

Se obtiene el punto medio y la pendiente del segmento $\overline{AB}$.

$$P_m\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{0+1}{2}\right) = P_m\left(-1, \frac{1}{2}\right) \qquad m = \frac{1-0}{1-(-3)} = \frac{1}{4}$$

Para obtener la pendiente de la mediatriz se aplica la condición de perpendicularidad y se obtiene:

$$m \cdot m' = -1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{4} \cdot m' = -1 \quad \rightarrow \quad m' = -4$$

Se sustituyen las coordenadas del punto medio y m' en la ecuación punto pendiente de la recta y se obtiene la ecuación de la mediatriz:

$$y - \frac{1}{2} = -4\left(x - (-1)\right) \quad \rightarrow \quad y - \frac{1}{2} = -4x - 4 \quad \rightarrow \quad 4x + y + \frac{7}{2} = 0$$

$$8x + 2y + 7 = 0$$

Por consiguiente, la ecuación de la mediatriz es: $8x + 2y + 7 = 0$.

Mediana

Segmento de recta que une un vértice de un triángulo con el punto medio del lado opuesto. El punto de intersección de las medianas es el *baricentro* (*centro de gravedad*).

Ejemplo

Para el triángulo determinado por los vértices $A(-3, 1)$, $B(1, 4)$ y $C(5, -3)$, determina la ecuación de la mediana trazada desde el vértice B al lado $\overline{AC}$.

Solución

Se obtiene el punto medio del segmento $\overline{AC}$:

$$P_m\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{1+(-3)}{2}\right) = P_m(1, -1)$$

Con el punto medio y las coordenadas del vértice B, se aplica la ecuación de la recta por dos puntos para obtener la ecuación de la mediana:

$$y-4=\frac{-1-4}{1-1}(x-1) \quad \rightarrow \quad y-4=\frac{-5}{0}(x-1) \quad \rightarrow \quad 0=x-1$$

Por tanto, la ecuación de la mediana trazada desde el vértice B al lado $\overline{AC}$ es: $x-1=0$.

Altura

Recta trazada en forma perpendicular de un vértice al lado opuesto de un triángulo. El punto de intersección de las alturas es el *ortocentro*.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Los vértices de un triángulo son los puntos $A(2, 3)$, $B(-4, 0)$ y $C(0, -2)$, determina la ecuación de la altura trazada desde el vértice A.

Solución

Se obtiene la pendiente del lado $\overline{BC}$, y posteriormente la pendiente de la altura.

$$m=\frac{-2-0}{0-(-4)}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{2}m'=-1 \quad \rightarrow \quad m'=2$$

Se sustituyen las coordenadas del vértice A y la pendiente m' en la ecuación punto pendiente de la recta y se obtiene la ecuación de la altura buscada:

$$y-3=2(x-2) \qquad y-3=2x-4 \qquad 2x-y-1=0$$

2 Los vértices de un triángulo son $A(-2, 1)$, $B(4, 7)$ y $C(6, -3)$, determina:

a) Las ecuaciones de las medianas y las coordenadas de su punto de intersección.
b) Las ecuaciones y las coordenadas del punto de intersección de las mediatrices.
c) Las ecuaciones y el punto de intersección de las alturas.

Solución

a) Para las medianas se determinan los puntos medios de los lados del triángulo.

Punto medio $\overline{AB}$

$$x=\frac{-2+4}{2}=\frac{2}{2}=1$$
$$y=\frac{1+7}{2}=\frac{8}{2}=4$$
$$Pm\ \overline{AB}\ (1, 4)$$

Punto medio $\overline{BC}$

$$x=\frac{4+6}{2}=\frac{10}{2}=5$$
$$y=\frac{7+(-3)}{2}=\frac{4}{2}=2$$
$$Pm\ \overline{BC}\ (5, 2)$$

Punto medio $\overline{AC}$

$$x=\frac{-2+6}{2}=\frac{4}{2}=2$$
$$y=\frac{1+(-3)}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$
$$Pm\ \overline{AC}\ (2, -1)$$

Para obtener las medianas se toma un vértice y el punto medio del lado opuesto.

Mediana del vértice A

Se toman los datos $A(-2, 1)$ y $Pm\ \overline{BC}\ (5, 2)$

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \quad \rightarrow \quad y-1=\frac{2-1}{5-(-2)}(x-(-2))$$
$$y-1=\frac{1}{7}(x+2)$$
$$7(y-1)=1(x+2)$$
$$7y-7=x+2$$
$$x+2-7y+7=0$$
$$x-7y+9=0$$

Mediana del vértice B

Se toman los datos $B(4, 7)$ y $Pm\ \overline{AC}\ (2, -1)$

$$y-7=\frac{-1-7}{2-4}(x-4) \rightarrow y-7=\frac{-8}{-2}(x-4)$$
$$y-7=4(x-4)$$
$$y-7=4x-16$$
$$4x-16-y+7=0$$
$$4x-y-9=0$$

Mediana del vértice C

Se toman los datos $C(6, -3)$ y $Pm\ \overline{AB}\ (1, 4)$

$$y-(-3)=\frac{4-(-3)}{1-6}(x-6) \rightarrow y+3=\frac{4+3}{-5}(x-6)$$
$$y+3=-\frac{7}{5}(x-6)$$
$$5(y+3)=-7(x-6)$$
$$5y+15=-7x+42$$
$$7x-42+5y+15=0$$
$$7x+5y-27=0$$

Para encontrar el baricentro, se realiza un sistema de ecuaciones entre dos medianas cualesquiera; en este caso se resuelve el sistema con las medianas del vértice A y C.

$$x-7y+9=0$$
$$7x+5y-27=0$$

Al resolver el sistema de ecuaciones se obtienen las coordenadas del punto de intersección.

$$\text{Baricentro}\ \left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

b) Para las mediatrices se determinan las pendientes de los lados del triángulo.

Pendiente del lado $\overline{AB}$

$$m_{\overline{AB}}=\frac{7-1}{4-(-2)}=\frac{6}{6}=1$$

Pendiente del lado $\overline{BC}$

$$m_{\overline{BC}}=\frac{-3-7}{6-4}=\frac{-10}{2}=-5$$

Pendiente del lado $\overline{AC}$

$$m_{\overline{AC}}=\frac{-3-1}{6-(-2)}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2}$$

Se aplica la condición de perpendicularidad para encontrar las pendientes de las mediatrices.

Pendiente de la mediatriz sobre $\overline{AB}$ $\quad m_1=-\dfrac{1}{m_{\overline{AB}}}=-1$

Pendiente de la mediatriz sobre $\overline{BC}$ $\quad m_2=-\dfrac{1}{m_{\overline{BC}}}=\dfrac{1}{5}$

Pendiente de la mediatriz sobre $\overline{AC}$ $\quad m_3=-\dfrac{1}{m_{\overline{AC}}}=2$

Mediatriz sobre el lado AB

Se toma el punto medio $(1, 4)$ de $\overline{AB}$ y $m_1=-1$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-4=-1(x-1)$$
$$y-4=-x+1$$
$$x-1+y-4=0$$
$$x+y-5=0$$

Mediatriz sobre el lado *BC*

Se toma el punto medio (5, 2) de $\overline{BC}$, $m_2 = \frac{1}{5}$ y se sustituye en: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 2 = \frac{1}{5}(x - 5)$$

$$5(y - 2) = 1(x - 5)$$

$$5y - 10 = x - 5$$

$$x - 5 - 5y + 10 = 0$$

$$x - 5y + 5 = 0$$

Mediatriz sobre el lado *AC*

Se toma el punto medio (2, –1) de $\overline{AC}$, $m_3 = 2$ y se sustituye en: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y + 1 = 2(x - 2)$$

$$y + 1 = 2x - 4$$

$$2x - 4 - y - 1 = 0$$

$$2x - y - 5 = 0$$

Para encontrar las coordenadas del circuncentro se resuelve un sistema de ecuaciones con dos mediatrices cualesquiera:

$$x + y - 5 = 0$$

$$2x - y - 5 = 0$$

Al resolver, se obtiene el punto $\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$

c) Con las pendientes perpendiculares de los lados y los vértices opuestos se obtienen las ecuaciones de las alturas.

Altura sobre el lado *BC*.

Se toma el vértice *A*(– 2, 1) y la pendiente perpendicular al lado *BC*, $m_2 = \frac{1}{5}$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \rightarrow \quad y - 1 = \frac{1}{5}(x + 2)$$

$$5(y - 1) = 1(x + 2)$$

$$5y - 5 = x + 2$$

$$x + 2 - 5y + 5 = 0$$

$$x - 5y + 7 = 0$$

Altura sobre el lado *AC*.

Se toma el vértice *B*(4, 7) y la pendiente perpendicular al lado *AC*, $m_3 = 2$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \rightarrow \quad y - 7 = 2(x - 4)$$

$$y - 7 = 2x - 8$$

$$2x - 8 - y + 7 = 0$$

$$2x - y - 1 = 0$$

Altura sobre el lado *AB*

Se toma el vértice $C(6, -3)$ y la pendiente perpendicular al lado *AB*, $m_1 = -1$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \rightarrow \quad y + 3 = -1(x - 6)$$

$$y + 3 = -x + 6$$

$$x - 6 + y + 3 = 0$$

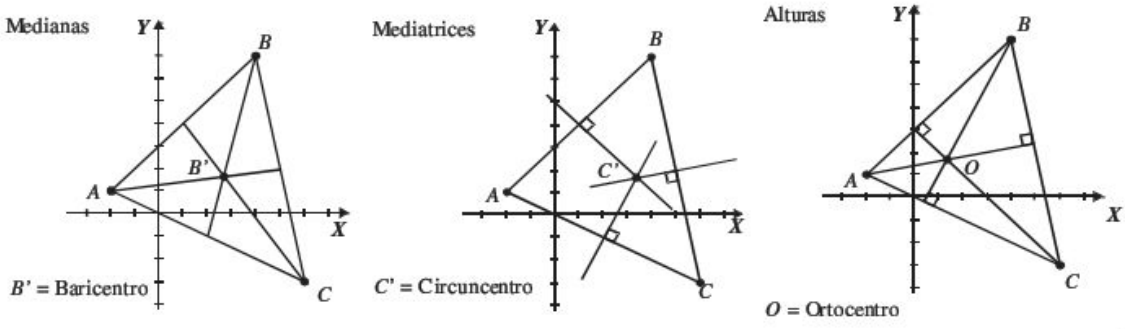
$$x + y - 3 = 0$$

Para encontrar las coordenadas del ortocentro se resuelve un sistema de ecuaciones con dos alturas cualesquiera:

$$2x - y - 1 = 0$$

$$x + y - 3 = 0$$

Al resolver, se obtiene el punto $\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$ que representa el ortocentro.



Bisectriz

Semirrecta que divide a un ángulo en dos ángulos iguales. En un triángulo, el punto de intersección de las bisectrices se conoce como *incentro*.

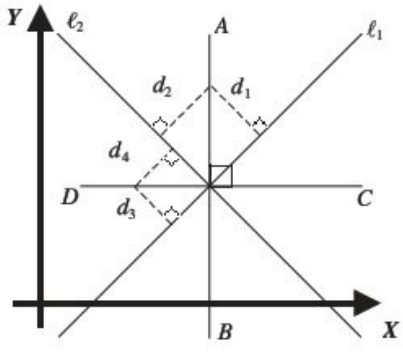
Ecuación de la bisectriz

Sean las rectas ℓ_1 y ℓ_2, donde: ℓ_1: $Ax + By + C = 0$; ℓ_2: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, sus bisectrices son las rectas $\overline{AB}$ y$\overline{CD}$, cuyas ecuaciones están dadas por la condición:

$$|d_1| = |d_2|$$

De la cual se obtiene:

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm\left[\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}\right]$$



Los signos de las distancias se eligen de la siguiente manera:

- Las distancias son positivas si para un punto cualquiera $P(x, y)$ sobre la bisectriz, el origen y dicho punto se encuentran en regiones opuestas.
- Si para un punto cualquiera $P(x, y)$ sobre la bisectriz, el origen y dicho punto se encuentran en la misma región, se usa el signo negativo para indicar el sentido.

Los signos del radical se consideran de la siguiente manera:

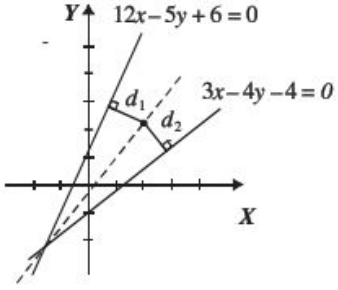
- Si $C \neq 0$, entonces el radical tendrá signo opuesto al de C.
- Si $C = 0$, el signo del radical se considerará igual al de B.
- Si $C = B = 0$, el signo del radical tendrá igual signo que A.

EJEMPLOS

Ejemplos 1 ¿Cuál es la ecuación de la bisectriz del ángulo agudo formado por las rectas, $3x - 4y - 4 = 0$ y $12x - 5y + 6 = 0$?

Solución

Se traza la gráfica:



De la figura se obtiene que $-d_1 = -d_2$ ya que el punto $P(x, y)$ se encuentra en la misma región que el origen para ambas rectas, por tanto,

$$-d_1 = -d_2 \qquad \text{o bien} \qquad d_1 = d_2$$

Al sustituir en la fórmula

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \quad \rightarrow \quad \frac{12x - 5y + 6}{-\sqrt{(12)^2 + (-5)^2}} = \frac{3x - 4y - 4}{\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}}$$

$$\frac{12x - 5y + 6}{-\sqrt{169}} = \frac{3x - 4y - 4}{\sqrt{25}}$$

$$5(12x - 5y + 6) = -13(3x - 4y - 4)$$

$$60x - 25y + 30 = -39x + 52y + 52$$

$$99x - 77y - 22 = 0$$

$$9x - 7y - 2 = 0$$

En consecuencia, la ecuación de la bisectriz del ángulo agudo es la recta $9x - 7x - 2 = 0$.

2 ●●○ Determina las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por la intersección de las rectas $x + 2y - 3 = 0$, $x - 2y - 2 = 0$.

Solución

Al aplicar la definición se determina que las distancias se relacionan de la siguiente manera:

$$d_1 = d_2 \text{ y } d_1 = -d_2$$

Si $d_1 = d_2$, entonces:

$$\frac{x+2y-3}{\sqrt{(1)^2+(2)^2}} = \frac{x-2y-2}{\sqrt{(1)^2(-2)^2}}$$

$$\frac{x+2y-3}{\sqrt{5}} = \frac{x-2y-2}{\sqrt{5}}$$

$$x + 2y - 3 = x - 2y - 2$$

$$x + 2y - 3 - x + 2y + 2 = 0$$

$$4y - 1 = 0$$

Si $d_1 = -d_2$, entonces:

$$\frac{x+2y-3}{\sqrt{(1)^2+(2)^2}} = -\frac{x-2y-2}{\sqrt{(1)^2(-2)^2}}$$

$$\frac{x+2y-3}{\sqrt{5}} = -\frac{x-2y-2}{\sqrt{5}}$$

$$x + 2y - 3 = -x + 2y + 2$$

$$x + 2y - 3 + x - 2y - 2 = 0$$

$$2x - 5 = 0$$

Finalmente, las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos son:

$$4y - 1 = 0;\ 2x - 5 = 0$$

EJERCICIO 19

Resuelve los siguientes problemas:

1. Para el segmento definido por los puntos $A(2, -3)$ y $B(-6, 1)$, determina la ecuación de la mediatriz.
2. Determina la ecuación general de la mediatriz del segmento formado por los puntos $A(3, 2)$ y $B(1, 5)$.
3. Encuentra la ecuación de la bisectriz del ángulo agudo formado por las rectas:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1 \text{ y } y = 3$$

4. Obtén la ecuación de la bisectriz del ángulo obtuso formado por las rectas:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-6} = 1 \text{ y } -\frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y - \frac{6}{\sqrt{5}} = 0$$

5. Encuentra las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas:

$$2x - y - 3 = 0 \text{ y } 2x + 4y + 5 = 0$$

6. Determina las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que forman las rectas:

$$3x - 4y + 5 = 0 \text{ y } 12x + 5y - 3 = 0$$

7. Las ecuaciones de los lados de un triángulo son las rectas:

$$3x - 4y + 20 = 0;\ 4x + 3y - 25 = 0;\ 3x + 4y + 4 = 0$$

Obtén las ecuaciones de las bisectrices y su punto de intersección.

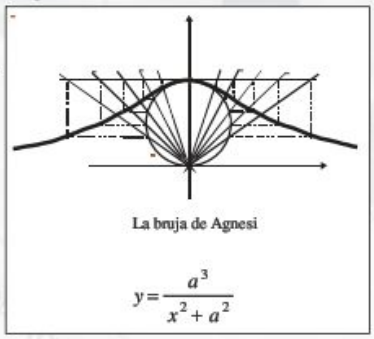
Para el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(-1, 3)$, $B(3, 5)$ y $C(5, -7)$:

8. Encuentra las ecuaciones de las mediatrices y su punto de intersección.
9. Determina las ecuaciones de las alturas y su punto de intersección.
10. ¿Cuáles son las ecuaciones de las medianas y su punto de intersección?
11. Encuentra las ecuaciones de las bisectrices y su punto de intersección.
12. Obtén la ecuación de la recta de Euler (recta que pasa por el circuncentro, baricentro y ortocentro).

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

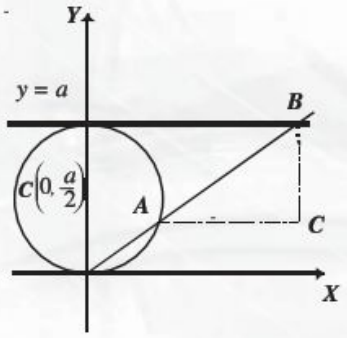
CAPÍTULO 6
CIRCUNFERENCIA

La bruja de AGNESI



Construcción de la gráfica de la bruja de Agnesi

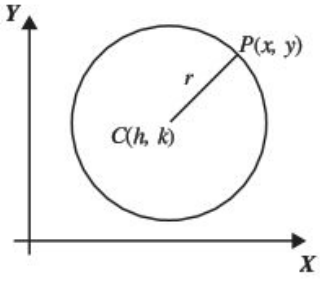
Se obtiene una circunferencia tangente al eje X con centro en el eje Y de coordenadas $\left(0, \frac{a}{2}\right)$, se traza una recta tangente a la circunferencia paralela al eje X con ecuación $y = a$, se traza una recta secante que corte a la circunferencia en A y a la recta $y = a$ en B, se construye el punto C con la abscisa del punto B y la ordenada del punto A, formando un triángulo rectángulo.



Cuando el punto A recorre toda la circunferencia y el punto B la recta tangente, se forma una curva a la cual se conoce como la bruja de Agnesi.

Definición

Es el lugar geométrico que describe un punto que se mueve en el plano de tal manera que su distancia a un punto fijo llamado centro, siempre es constante.



Definición:

$$d_{CP} = r \rightarrow \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

Elementos:

C: centro

r: radio

P(x, y): punto cualquiera de la circunferencia

Ecuaciones de la circunferencia

Las formas de expresar la ecuación de una circunferencia son las siguientes:

Ecuación en su forma ordinaria

Ecuación de la circunferencia con centro en el punto $C\ (h,\ k)$ y radio r.

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Ecuación en su forma general

Esta ecuación se obtiene al desarrollar los binomios e igualar a cero la ecuación ordinaria.

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,\ \text{con}\ A = C$$

Ecuación en su forma canónica

Si el centro de la circunferencia se encuentra en el origen, entonces su ecuación es de la forma:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Análisis de la ecuación de una circunferencia

- Si r es positivo la circunferencia es real.
- Si r es negativo la circunferencia es imaginaria.
- Si r es igual a cero entonces representa un punto.

EJEMPLOS

Ejemplos 1 Una circunferencia tiene su centro en el origen y su radio es de 6 unidades. ¿Cuál es su ecuación en forma general?

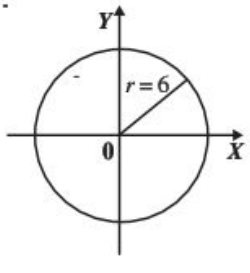
Solución

Se sustituye $r = 6$ en la forma canónica de la ecuación de la circunferencia y se transforma a la forma general:

$$x^2 + y^2 = 6^2$$

$$x^2 + y^2 = 36$$

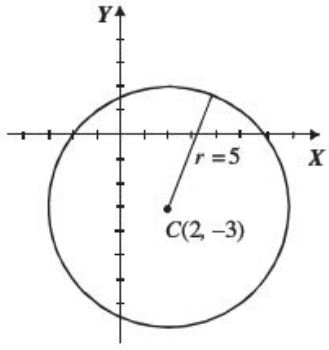
$$x^2 + y^2 - 36 = 0$$



2 ●●○ Encuentra la ecuación general de la circunferencia con centro en (2, – 3) y radio 5.

Solución

Se sustituyen el centro y el radio en la ecuación ordinaria y se transforma a su forma general:



$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$(x-2)^2+(y-(-3))^2=(5)^2$

$(x-2)^2+(y+3)^2=25$

$x^2-4x+4+y^2+6y+9=25$

$x^2+y^2-4x+6y-12=0$

Se concluye que la ecuación general de la circunferencia es $x^2+y^2-4y+6y-12=0$

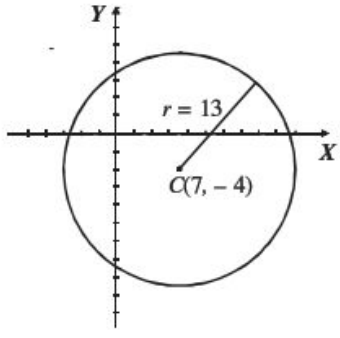
3 ●●○ Determina la ecuación general de la circunferencia de centro en el punto (7, – 4) y que pasa por el punto (– 5, 1).

Solución

Por definición, la distancia del centro (7, – 4) al punto (– 5, 1) es el radio:

$$r=\sqrt{\left(7-(-5)\right)^2+\left(-4-1\right)^2}=\sqrt{144+25}=13$$

El centro $C(7,-4)$ y el radio $r=13$ se sustituyen en la ecuación ordinaria:



$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$(x-7)^2+(y-(-4))^2=(13)^2$

$(x-7)^2+(y+4)^2=169$

$x^2-14x+49+y^2+8y+16-169=0$

$x^2+y^2-14x+8y-104=0$

La ecuación en su forma ordinaria es $(x-7)^2+(y+4)^2=169$ y en su forma general, $x^2+y^2-14x+8y-104=0$

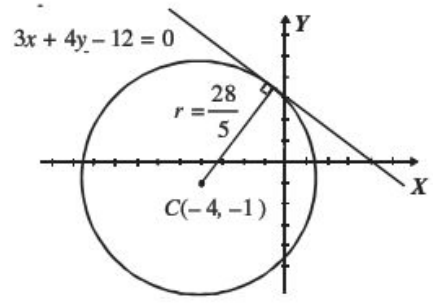
4 ●●○ Obtén la ecuación general de la circunferencia con centro en $(-4, -1)$ y que es tangente a la recta $3x + 4y - 12 = 0$.

Solución

El radio de la circunferencia es la distancia del centro a la recta tangente.

$$r = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3(-4) + 4(-1) - 12|}{\sqrt{(3)^2 + (4)^2}} = \frac{|-12 - 4 - 12|}{\sqrt{(3)^2 + (4)^2}} = \frac{|-28|}{\sqrt{9+16}} = \frac{28}{\sqrt{25}} = \frac{28}{5}$$

Se sustituyen $r = \frac{28}{5}$ y el centro $C(-4, -1)$ en la forma ordinaria:



$$(x - (-4))^2 + (y - (-1))^2 = \left(\frac{28}{5}\right)^2$$

$$(x + 4)^2 + (y + 1)^2 = \frac{784}{25}$$

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 + 2y + 1 = \frac{784}{25}$$

$$x^2 + y^2 + 8x + 2y - \frac{359}{25} = 0$$

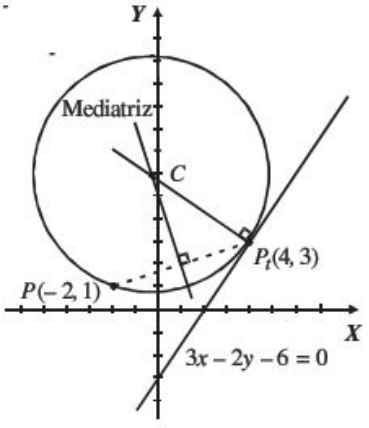
$$25x^2 + 25y^2 + 200x + 50y - 359 = 0$$

Por tanto, la ecuación general de la circunferencia es: $25x^2 + 25y^2 + 200x + 50y - 359 = 0$.

5 ●●○ Determina la ecuación general de la circunferencia que pase por el punto $(-2, 1)$ y sea tangente a la recta $3x - 2y - 6 = 0$, en el punto $(4, 3)$.

Solución

Se traza la gráfica:



El centro es el punto de intersección entre la mediatriz del segmento $\overline{PP_t}$ y la ecuación perpendicular a la recta $3x - 2y - 6 = 0$.

El radio es la distancia del centro a cualquiera de los puntos que están sobre la circunferencia.

- Ecuación de la mediatriz del segmento $\overline{PP_t}$
  Con el punto medio $(1, 2)$ y la pendiente perpendicular -3, se obtiene:
  $$3x + y - 5 = 0$$
- Ecuación de la recta perpendicular a $3x - 2y - 6 = 0$ en el punto $(4, 3)$
  Con la pendiente perpendicular $-\frac{2}{3}$ y el punto $(4, 3)$, se obtiene:
  $$2x + 3y - 17 = 0$$

Se resuelve el sistema formado por las rectas $2x + 3y - 17 = 0$ y $3x + y - 5 = 0$ y se obtienen las coordenadas del centro (h, k):

$$C\left(-\frac{2}{7}, \frac{41}{7}\right)$$

El radio es la distancia que existe entre el centro y cualquiera de los puntos por los que pasa la circunferencia, por consiguiente se escoge el punto $(4, 3)$:

$$r = \sqrt{\left(4 - \left(-\frac{2}{7}\right)\right)^2 + \left(3 - \frac{41}{7}\right)^2} = \frac{10\sqrt{13}}{7}$$

Con el centro y el radio se encuentra la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \rightarrow \left(x + \frac{2}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{41}{7}\right)^2 = \left(\frac{10\sqrt{13}}{7}\right)^2$$

Al desarrollar y simplificar se obtiene la ecuación en su forma general:

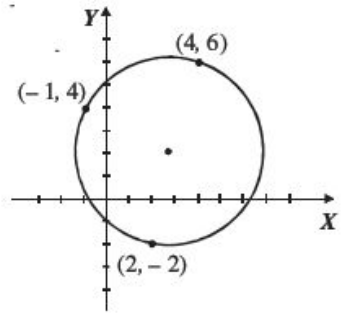
$$7x^2 + 7y^2 + 4x - 82y + 55 = 0$$

6 ●●○ Encuentra la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos $A(2, -2)$, $B(-1, 4)$ y $C(4, 6)$.

Solución

Existen dos formas de resolver el problema:

1. Sustituir todos los puntos en la ecuación general y resolver el sistema de ecuaciones.
2. Obtener el centro con la intersección de las mediatrices de los segmentos formados por los puntos y posteriormente el radio con la distancia del centro a cualquiera de los tres puntos.



Aplicación de la primera opción:

La ecuación general es $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, entonces si $A = C = 1$, se convierte en $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Sustitución del punto $A(2, -2)$

$$(2)^2 + (-2)^2 + D(2) + E(-2) + F = 0$$
$$4 + 4 + 2D - 2E + F = 0$$
Primera ecuación: $2D - 2E + F = -8$

Sustitución del punto $B(-1, 4)$

$$(-1)^2 + (4)^2 + D(-1) + E(4) + F = 0$$
$$1 + 16 - D + 4E + F = 0$$
Segunda ecuación: $-D + 4E + F = -17$

Sustitución del punto $C(4, 6)$

$$(4)^2 + (6)^2 + D(4) + E(6) + F = 0$$
$$16 + 36 + 4D + 6E + F = 0$$
Tercera ecuación: $4D + 6E + F = -52$

Resulta un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, resolviendo:

$$2D - 2E + F = -8$$
$$-D + 4E + F = -17$$
$$4D + 6E + F = -52$$

Se obtienen los valores de D, E y F,

$$D = -\frac{16}{3},\ E = -\frac{25}{6} \text{ y } F = -\frac{17}{3}$$

Estos valores se sustituyen en la ecuación general:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

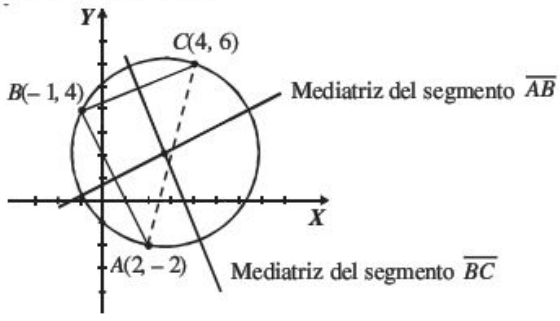
Por tanto, se concluye que la ecuación es:

$$x^2 + y^2 - \frac{16}{3}x - \frac{25}{6}y - \frac{17}{3} = 0$$

Ahora bien, al multiplicar por seis para eliminar los denominadores, se obtiene:

$$6x^2 + 6y^2 - 32x - 25y - 34 = 0$$

Para la segunda opción, se utilizan las mediatrices:



Se obtienen las ecuaciones de las mediatrices de los segmentos:

Mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

Coordenadas del punto medio:

$$P_m\left(\frac{2+(-1)}{2}, \frac{-2+4}{2}\right) = P_m\left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

Pendiente del segmento:

$$m = \frac{4-(-2)}{-1-2} = -2$$

Pendiente de la mediatriz:

$$m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

Ecuación de la mediatriz:

$$y-1 = \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right) \rightarrow 2x-4y+3=0$$

Mediatriz del segmento $\overline{BC}$.

Coordenadas del punto medio:

$$P_m\left(\frac{-1+4}{2}, \frac{4+6}{2}\right) = P_m\left(\frac{3}{2}, 5\right)$$

Pendiente del segmento:

$$m = \frac{6-4}{4-(-1)} = \frac{2}{5}$$

Pendiente de la mediatriz:

$$m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{\frac{2}{5}} = -\frac{5}{2}$$

Ecuación de la mediatriz:

$$y-5 = -\frac{5}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right) \rightarrow 10x+4y-35=0$$

Para buscar el centro de la circunferencia se resuelve el sistema de ecuaciones formado con las mediatrices:

$$\begin{cases} 2x-4y+3=0 \\ 10x+4y-35=0 \end{cases}$$

El punto de intersección de las rectas es $\left(\frac{8}{3}, \frac{25}{12}\right)$, representa el centro de la circunferencia. Para obtener el radio, se calcula la distancia del centro al punto $B(-1, 4)$ o a cualquiera de los otros puntos.

$$r = \sqrt{\left(\frac{8}{3}-(-1)\right)^2 + \left(\frac{25}{12}-4\right)^2} \rightarrow r = \sqrt{\left(\frac{11}{3}\right)^2 + \left(-\frac{23}{12}\right)^2} \rightarrow r = \sqrt{\frac{2\,465}{144}}$$

Se sustituyen el centro $\left(\frac{8}{3}, \frac{25}{12}\right)$ y el radio $r = \sqrt{\frac{2465}{144}}$ en la ecuación ordinaria de la circunferencia y se transforma a su forma general.

$$\left(x-\frac{8}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{25}{12}\right)^2 = \sqrt{\frac{2\,465}{144}} \rightarrow x^2 - \frac{16x}{3} + \frac{64}{9} + y^2 - \frac{25y}{6} + \frac{625}{144} - \frac{2\,465}{144} = 0$$

$$x^2 + y^2 - \frac{16x}{3} - \frac{25y}{6} - \frac{17}{3} = 0$$

$$6x^2 + 6y^2 - 32x - 25y - 34 = 0$$

Se observa que por cualquiera de los dos métodos, la ecuación de la circunferencia que pasa por los tres puntos dados o circunscrita en el triángulo es:

$$6x^2 + 6y^2 - 32x - 25y - 34 = 0$$

EJERCICIO 20

De los siguientes ejercicios, encuentra la ecuación en su forma general:

1. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio de 4 unidades?
2. Determina la ecuación de la circunferencia de centro en el origen y radio de $\frac{\sqrt{3}}{2}$ unidades.
3. Encuentra la ecuación de la circunferencia de centro en el punto $C(1, -3)$ y radio de 2 unidades.
4. Obtén la ecuación de la circunferencia de centro en el punto $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$ y radio de $\frac{5}{6}$.
5. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia de centro en el origen y que pasa por el punto $(2, -3)$?
6. Encuentra la ecuación de la circunferencia de diámetro el segmento formado por los puntos $A(-4, 7)$ y $B(6, -1)$.
7. Determina la ecuación de la circunferencia de centro en el punto $C(1, -3)$ y que pasa por el punto $(4, 3)$.
8. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en $(-1, -5)$ y es tangente al eje Y?
9. El centro de una circunferencia es el punto $(5, -2)$ y pasa por el origen. ¿Cuál es su ecuación?
10. Obtén la ecuación de la circunferencia de centro en el punto $(-4, 2)$ y diámetro 8.
11. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia que es tangente a los ejes coordenados, su radio es de 5 unidades y su centro está en el cuarto cuadrante?
12. Una circunferencia tiene su centro en el eje X y pasa por los puntos $(-1, 5)$ y $(2, 3)$. Determina su ecuación.
13. El centro de una circunferencia está en el eje Y y pasa por $(0, -2)$ y $(3, -6)$. Encuentra su ecuación.
14. Una circunferencia tiene su centro en $(0, -2)$ y es tangente a la recta $5x - 12y + 2 = 0$. ¿Cuál es su ecuación?
15. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia con centro en $(4, -3)$ y que es tangente a la recta $3x + 4y - 10 = 0$?
16. El radio de una circunferencia es 4 y su centro está en las intersecciones de las rectas $x + 3y - 7 = 0$ y $2x + 5y - 12 = 0$. Obtén su ecuación.
17. Determina la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $2x - 3y - 6 = 0$, $3x + y + 13 = 0$, además, es tangente a la recta $5x + 12y - 106 = 0$.
18. Una circunferencia pasa por el punto $(1, -6)$ y su centro está en la intersección de las rectas $4x - 7y + 10 = 0$ y $7x + 3y - 13 = 0$. Encuentra su ecuación.

Encuentra las ecuaciones de las circunferencias que pasan por los siguientes puntos.

19. $(3, 4)$, $(2, -1)$ y $(0, -3)$
20. $(9, -1)$, $(7, 3)$ y $(4, -8)$
21. $(-2, -2)$, $(-2, 1)$ y $(7, 0)$
22. $(-1, -1)$, $(1, 1)$ y $(5, -3)$
23. Encuentra la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo, cuyos vértices son los puntos $(-4, 2)$, $\left(\frac{8}{5}, \frac{31}{5}\right)$ y $(16, -13)$.

Para los ejercicios 24 a 27 utiliza el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(3, -2)$, $B(1, 2)$ y $C(-5, -4)$.

24. Encuentra la ecuación de la circunferencia circunscrita en él.
25. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados del triángulo?
26. Determina la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el vértice A y es tangente al lado BC.
27. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en la recta $2x + 3y + 1 = 0$ y que pasa por los vértices A y C?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Transformación de la ecuación general a la forma ordinaria

Sea la ecuación de la circunferencia $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, en su forma general y $A = C$, entonces para hallar el centro y el radio se siguen los siguientes pasos:

$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$

$x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$ — Se divide la ecuación entre A.

$x^2 + \frac{D}{A}x + y^2 + \frac{E}{A}y = -\frac{F}{A}$ — Se agrupan los términos de x y y, el término independiente se pasa al segundo miembro.

$x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{D^2}{4A^2} + y^2 + \frac{E}{A}y + \frac{E^2}{4A^2} = \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2} - \frac{F}{A}$ — Se completa el trinomio cuadrado perfecto.

$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}$ — Se factoriza.

Ahora, al comparar la ecuación con su forma ordinaria se obtiene:

$$Centro = \left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}\right) \text{ y } radio = \frac{1}{2A}\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}$$

Lo anterior indica que para transformar la ecuación general a la forma ordinaria se utilizan los siguientes métodos:

- Fórmula
- Completando trinomio cuadrado perfecto

Con los cuales se encuentran las coordenadas del centro y la longitud del radio de una circunferencia.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Emplea las fórmulas para obtener el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es:

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 6 = 0$$

Solución

Se determinan los valores de A, D, E y F:

$$A = 1,\ D = 4,\ E = -6 \text{ y } F = 6$$

Éstos se sustituyen en las fórmulas:

$$Centro = \left(-\frac{4}{2(1)}, -\frac{(-6)}{2(1)}\right) = (-2,\ 3) \text{ y } radio = \frac{1}{2(1)}\sqrt{(4)^2 + (-6)^2 - 4(1)(6)} = \frac{1}{2}\sqrt{28} = \sqrt{7}$$

Se concluye que el centro es el punto $(-2, 3)$ y el radio $\sqrt{7}$.

2 Para la circunferencia cuya ecuación es:

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$$

Determina completando los trinomios cuadrados perfectos el centro y el radio.

Solución

$x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$

$(x^2 - 6x) + (y^2 + 8y) = 11$ — Se agrupan los términos en x y en y, el término independiente se pasa al segundo miembro.

$(x^2 - 6x + (3)^2) + (y^2 + 8y + (4)^2) = 11 + (3)^2 + (4)^2$ — Se completan los trinomios cuadrados perfectos.

$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 8y + 16) = 36$

$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 6^2$ — Se factoriza para obtener la forma ordinaria.

Resulta que las coordenadas del centro son $C(3, -4)$ y el radio $r = 6$.

3 ●●○ Encuentra las coordenadas del centro y la longitud del radio de la circunferencia, cuya ecuación es:

$$9x^2 + 9y^2 + 18x - 12y + 10 = 0$$

Solución

$9x^2 + 9y^2 + 18x - 12y + 10 = 0$

$\frac{9x^2}{9} + \frac{9y^2}{9} + \frac{18x}{9} - \frac{12}{9}y + \frac{10}{9} = 0$ Se divide entre nueve la ecuación.

$x^2 + y^2 + 2x - \frac{4}{3}y + \frac{10}{9} = 0$ Se agrupan los términos de x y y y se pasa al segundo miembro el término independiente.

$x^2 + 2x + 1 + y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9} = -\frac{10}{9} + 1 + \frac{4}{9}$ Se completa el trinomio cuadrado perfecto.

$(x+1)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$ Se factoriza y simplifica para obtener la ecuación ordinaria.

Finalmente, las coordenadas del centro son $C\left(-1, \frac{2}{3}\right)$ y el radio $r = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

4 ●●○ ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(-4, -1)$ y es concéntrica con la circunferencia C_1: $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$?

Nota: Concéntricas: tienen el mismo centro.

Solución

Se obtiene el centro de la circunferencia C_1:

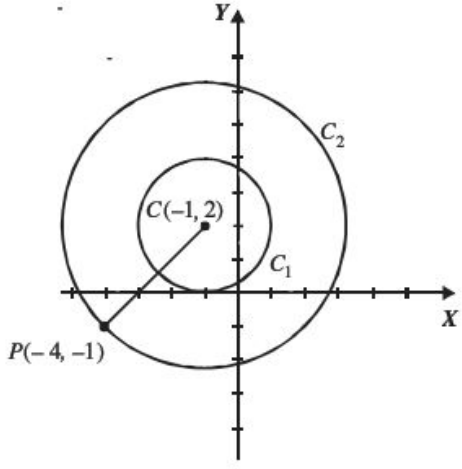
$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \rightarrow x^2 + 2x + y^2 - 4y = -1$$
$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = -1 + 1 + 4$$
$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

Entonces, el centro es $C(-1, 2)$.

El radio de C_2 se obtiene de la distancia del centro $C(-1,2)$ al $(-4, -1)$.

$$r = \sqrt{(-4-(-1))^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

Gráfica:



Por consiguiente, la ecuación de la circunferencia C_2 es:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \rightarrow (x-(-1))^2 + (y-2)^2 = \left(\sqrt{18}\right)^2$$
$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 18$$
$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 13 = 0$$

La ecuación de la circunferencia C_2 está determinada por:

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 13 = 0$$

5 ●●○ Obtén la ecuación general de la circunferencia que es tangente a la recta $x + y - 2 = 0$ y concéntrica con la circunferencia $3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 0$.

Solución

Se obtiene el centro de $3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 0$

$$3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 0 \rightarrow \frac{3x^2}{3} + \frac{3y^2}{3} - \frac{6}{3}x - \frac{4}{3}y = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x - \frac{4}{3}y = 0$$

$$x^2 - 2x + y^2 - \frac{4}{3}y = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9} = 1 + \frac{4}{9}$$

$$(x-1)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{13}{9}$$

El centro de la circunferencia es $\left(1, \frac{2}{3}\right)$.

El radio es la distancia del punto $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ a la recta $x + y - 2 = 0$, entonces,

$$r = \frac{\left|1 + \frac{2}{3} - 2\right|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}} = \frac{\left|-\frac{1}{3}\right|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

Por consiguiente, la ecuación general de la circunferencia con centro en $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ y radio $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ es:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \rightarrow (x-1)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

Al multiplicar por 18,

$$18x^2 - 36x + 18 + 18y^2 - 24y + 8 = 1$$

$$18x^2 + 18y^2 - 36x - 24y + 25 = 0$$

6 ●●○ Determina los puntos de intersección de las circunferencias:

$$C_1: x^2 + y^2 - 2x + 16y = 0 \; ; \; C_2: x^2 + y^2 - 6x - 4y = 0$$

Solución

Se restan las ecuaciones de las circunferencias, para eliminar los términos cuadráticos:

$$\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 2x + 16y = 0 \\ -\left(x^2 + y^2 - 6x - 4y = 0\right) \\ \hline 4x + 20y = 0 \end{array}$$

Se despeja x de la última igualdad:

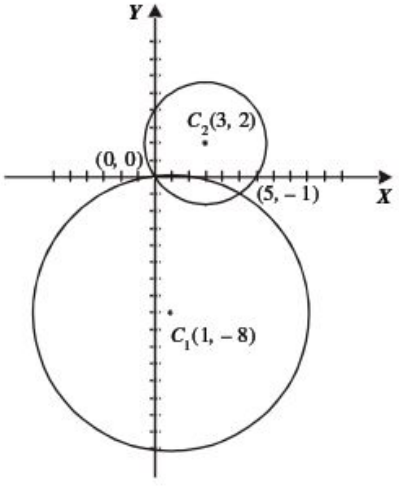
$$x = -\frac{20y}{4} \rightarrow x = -5y$$

Se sustituye el valor de x en cualquiera de las ecuaciones de las circunferencias:

$$(-5y)^2 + y^2 - 2(-5y) + 16y = 0$$

$$25y^2 + y^2 + 10y + 16y = 0$$

$$26y^2 + 26y = 0$$



Esta última ecuación se resuelve y se obtiene:

$$26y^2 + 26y = 0 \rightarrow 26y(y+1) = 0$$

$$y = 0;\ y = -1$$

Los valores obtenidos de y se sustituyen en la igualdad $x = -5y$ para obtener los valores de x:

Para $y = 0$	Para $y = -1$
$x = -5(0)$	$x = -5(-1)$
$x = 0$	$x = 5$

Entonces, los puntos de intersección de las circunferencias son: (0, 0) y (5, – 1).

EJERCICIO 21

Determina el centro y el radio de las siguientes circunferencias:

1. $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$
2. $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 20 = 0$
3. $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 10 = 0$
4. $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 14 = 0$
5. $x^2 + y^2 + 14x - 8y + 40 = 0$
6. $x^2 + y^2 - 8y + 7 = 0$
7. $x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$
8. $2x^2 + 2y^2 + 10x - 6y + 3 = 0$
9. $4x^2 + 4y^2 - 4x + 12y + 9 = 0$
10. $5x^2 + 5y^2 - 2x - 30y + 42 = 0$
11. $12x^2 + 12y^2 - 18x + 4y + 5 = 0$
12. $36x^2 + 36y^2 + 48x - 36y - 299 = 0$
13. Encuentra la ecuación general de la recta que pasa por el punto (7, 5) y es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x + 16y - 22 = 0$.
14. Determina la ecuación general de la circunferencia que pasa por el punto (3, 5) y es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 7x + y - 10 = 0$, en el punto (1, 1).
15. ¿Cuál es la ecuación general de la circunferencia de radio $\sqrt{13}$ y es tangente a la recta $2x + 3y - 7 = 0$, en el punto (2, 1)?
16. Obtén la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos de intersección de las circunferencias $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 16 = 0$ y $x^2 + y^2 + 17x + 3y + 2 = 0$, y cuyo centro está sobre la recta $x + 2y + 5 = 0$.
17. Determina el valor de k para que la recta $kx + y - 15 = 0$ sea tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 1 = 0$.
18. ¿Cuáles son los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 26 = 0$ con la recta $x - y + 8 = 0$?
19. Encuentra los puntos de intersección de la recta $2x + 3y - 10 = 0$ con la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 28 = 0$.
20. ¿Cuáles son los puntos de intersección de la recta $5x - 7y - 35 = 0$ con la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 36 = 0$?
21. Encuentra los puntos de intersección de las circunferencias:

$$x^2 + y^2 - 12x - 14y + 72 = 0\ ;\ x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$$

22. Determina los puntos de intersección de las circunferencias:

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y + 15 = 0\ ;\ x^2 + y^2 - 16x - 2y + 45 = 0$$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Familia o haz de circunferencias

Son aquellas circunferencias que satisfacen la condición:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = p^2$$

Donde p es el parámetro y es un número positivo.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Representa gráficamente la familia de circunferencias con centro en el punto $(2, -3)$ y $p = 1, 2$ y 3.

Solución

Se trata de una familia de circunferencias concéntricas.

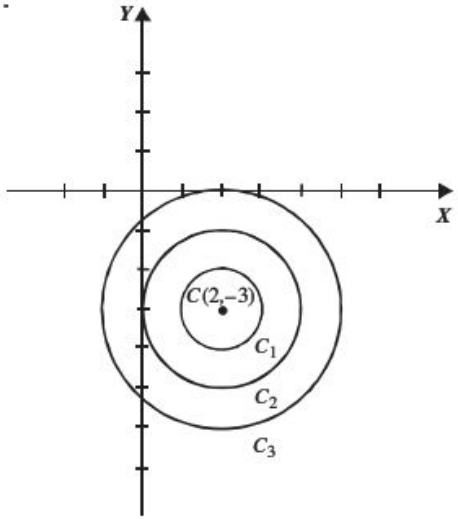
Las ecuaciones de las circunferencias son:

C_1: $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 1$ o $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$

C_2: $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$ o $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$

C_3: $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$ o $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$

Sus representaciones gráficas son:



EJERCICIO 22

Representa gráficamente las siguientes familias de circunferencias:

1. Centro en el punto $(1, 2)$ y $p = 1, 2$ y 3
2. Centro en el punto $(-2, -3)$ y $p = 1, 3$ y 5
3. Centro en el origen y $p = 2, 4$ y 6
4. $(x-1)^2 + (y-3)^2 = p^2$
5. $x^2 + (y-2)^2 = p^2$
6. $x^2 + y^2 = p^2$
7. Centro en el punto $(-3, 4)$ y $p = 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$
8. $(x+2)^2 + (y-3)^2 = p^2$
9. $(x-3)^2 + y^2 = p^2$
10. Centro en el punto $(0, -2)$ y $p = 2, 4$ y 6

Determina la familia de circunferencias que cumplen las siguientes condiciones:

11. Centro en la intersección de las rectas $2x + 3y - 5 = 0, x - 4y + 3 = 0$
12. Centro en el punto medio del segmento, cuyos extremos son $(3, -2)$ y $(-5, -4)$
13. Concéntricas con $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$
14. Concéntricas con la circunferencia que pasa por los puntos $(0, 0), (1, 1), (1, -1)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 8
PARÁBOLA

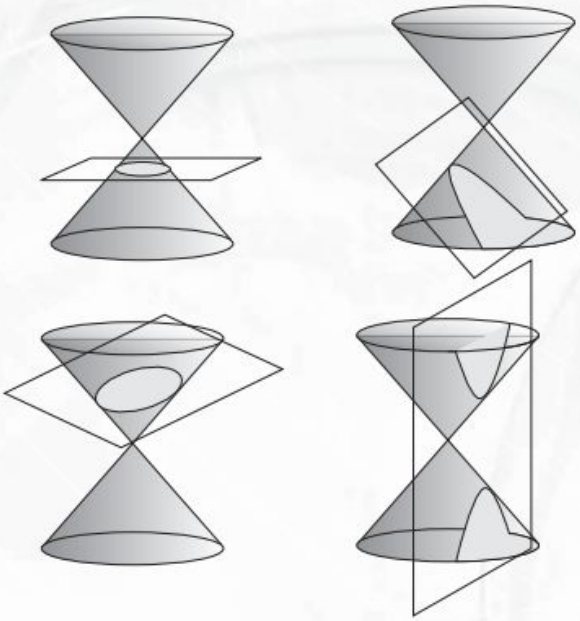
HISTÓRICA
Reseña

Apolonio de Perga
(262 *a. C.*–190 *a. C.*)

Conocido como "el gran geómetra". Se sabe poco de su vida, pero sus trabajos tuvieron una gran influencia en el desarrollo de las matemáticas, en particular su famoso libro *Las cónicas*, introdujo términos tan familiares hoy en día como parábola, elipse e hipérbola.

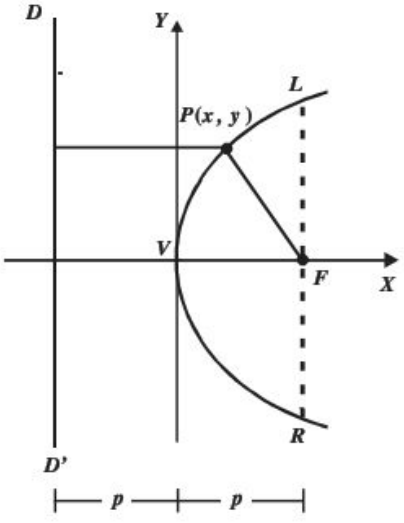
Apolonio demostró que las curvas cónicas tienen muchas propiedades interesantes. Algunas de esas propiedades son las que se utilizan actualmente para definirlas. Quizá las propiedades más interesantes y útiles que descubrió de las cónicas son las propiedades de reflexión. Si se construyen espejos con la forma de una curva cónica que gira alrededor de su eje, se obtienen espejos elípticos, parabólicos o hiperbólicos, según la curva que gira.

La circunferencia, parábola, elipse e hipérbola son llamadas cónicas porque se pueden obtener haciendo cortes en un cono circular recto doble con un plano.



Definición

Es el lugar geométrico que describe un punto que se mueve en el plano de tal manera que equidistan de un punto fijo, llamado foco, y una recta fija, llamada directriz.



$\overline{PF} = \overline{PD}$

Elementos:

V: Vértice

F: Foco

$\overline{DD'}$: Directriz

LR: Lado recto, $LR = |4p|$

p: parámetro
(distancia del vértice al foco o a la directriz)

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan del punto $F(0, 3)$ y de la recta $y + 3 = 0$.

Solución

Con las fórmulas de distancia entre dos puntos $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ y distancia de un punto a una recta $d = \dfrac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, se obtienen las distancias del punto $P(x, y)$ a F y a la recta:

$$\overline{PF} = \sqrt{x^2 + (y-3)^2}, \quad \overline{PD} = \frac{y+3}{\sqrt{0^2 + 1^2}}$$

Al igualar:

$$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = y + 3$$

Se elevan al cuadrado ambos miembros de la ecuación:

$$\left(\sqrt{x^2 + (y-3)^2}\right)^2 = (y+3)^2$$

Se desarrolla y se simplifica para obtener la ecuación del lugar geométrico, denominada parábola.

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 = y^2 + 6y + 9$$

$$x^2 - 12y = 0$$

2 Determina la ecuación del lugar geométrico de un punto del plano que se mueve de tal forma que su distancia al punto (2, 1) siempre es igual a su distancia a la recta $x + 2y - 3 = 0$.

Solución

Se obtienen las distancias,

$$\overline{PF} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}\ ,\ \overline{PD} = \frac{x+2y-3}{\sqrt{1^2+2^2}}$$

Al igualar,

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \frac{x+2y-3}{\sqrt{5}}$$

Al elevar al cuadrado ambos miembros y reducir términos semejantes, resulta la ecuación que se busca,

$$\left(\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}\right)^2 = \left(\frac{x+2y-3}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = \frac{x^2 + 4y^2 + 9 + 4xy - 6x - 12y}{5}$$

$$5x^2 + 5y^2 - 20x - 10y + 25 = x^2 + 4y^2 + 9 + 4xy - 6x - 12y$$

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 14x + 2y + 16 = 0$$

EJERCICIO 25

1. Un punto del plano se mueve de tal forma que su distancia al punto (– 2, 0) es igual a su distancia a la recta $x - 2 = 0$. Determina la ecuación del lugar geométrico descrito por el punto.
2. Un punto se mueve en el plano de tal manera que equidista del punto (0, – 1) y de la recta $y - 1 = 0$. Encuentra la ecuación del lugar geométrico que describe.
3. Un punto $P(x, y)$ se mueve de manera que su distancia al punto (3, – 1) es siempre igual a su distancia a la recta $x + 3 = 0$. Determina la ecuación del lugar geométrico.
4. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de la recta $y + 4 = 0$ y del punto (0, 4).
5. Obtén la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran a la misma distancia del punto (2, 4) y de la recta $y - 6 = 0$.
6. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano, de los cuales su distancia a la recta $x + 1 = 0$ es igual a su distancia al punto (– 7, 2).
7. Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del punto (0, 3) y de la recta $x + y - 4 = 0$.
8. Un punto del plano se mueve de tal forma que su distancia al punto (2, – 1) es igual a su distancia a la recta $2x + 3y - 1 = 0$. Obtén la ecuación del lugar geométrico que describe el punto.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuación de la parábola con vértice en el origen

Sea una parábola con vértice en el origen, foco $F(p, 0)$ donde p es el parámetro y su directriz $x = -p$. Se toma un punto $P(x, y)$ que cumpla con la condición de que la distancia al foco y a la directriz sea la misma, es decir:

$$\overline{PF} = \overline{PD}$$

Al aplicar la fórmula de distancia entre dos puntos, $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, y la de distancia de un punto a una recta $d = \dfrac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, se obtienen las distancias del punto P al foco y a la directriz.

La distancia de P al foco es:

$$\overline{PF} = \sqrt{(x - p)^2 + y^2}$$

La distancia de P a la recta $x + p = 0$ es:

$$\overline{PF} = \frac{1(x) + 0(y) + p}{\sqrt{(1)^2 + (0)^2}} = x + p$$

Ahora se igualan las distancias:

$$\sqrt{(x - p)^2 + y^2} = x + p$$

Al elevar al cuadrado cada miembro y simplificar se determina que:

$$\left(\sqrt{(x - p)^2 + y^2}\right)^2 = (x + p)^2$$

$$(x - p)^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 - x^2 - 2px - p^2 = 0$$

$$y^2 - 4px = 0$$

Si el foco está sobre el eje Y, $F(0, p)$ donde p es el parámetro y su directriz la recta $y = -p$ y vértice en el origen, al aplicar la definición el resultado es el siguiente:

$$\sqrt{(y - p)^2 + x^2} = y + p$$

Al elevar al cuadrado cada miembro y simplificar se obtiene:

$$\left(\sqrt{(y - p)^2 + x^2}\right)^2 = (y + p)^2$$

$$(y - p)^2 + x^2 = y^2 + 2py + p^2$$

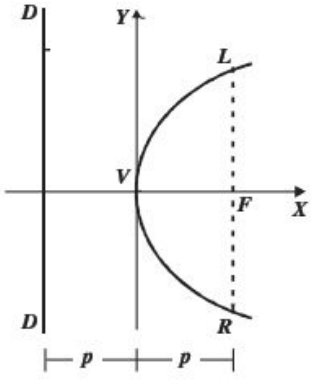
$$y^2 - 2py + p^2 + x^2 - y^2 - 2py - p^2 = 0$$

$$x^2 - 4py = 0$$

Elementos y ecuación de una parábola con vértice en el origen

Parábola horizontal

Su foco está sobre el eje X y son cóncavas hacia la derecha o a la izquierda.



Ecuación canónica:

$$y^2 = 4px$$

Foco: $F(p, 0)$

Directriz $\left(\overline{DD'}\right)$: $x = -p$

Ecuación del eje: $y = 0$

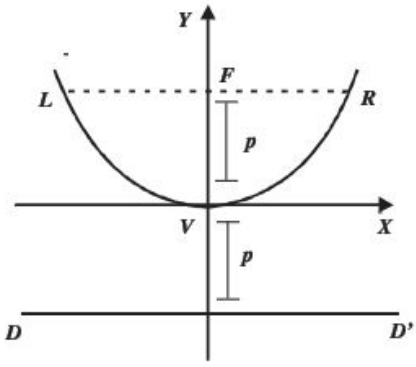
Lado recto: $\overline{LR} = |4p|$

Cancavidad

- Si $p > 0$ entonces la parábola abre hacia la derecha.
- Si $p < 0$ entonces la parábola abre hacia la izquierda.

Parábola vertical

Su foco está sobre el eje Y, son cóncavas hacia arriba o hacia abajo.



Ecuación canónica:

$x^2 = 4py$

Foco: $F(0, p)$

Directriz $\left(\overline{DD'}\right)$: $y = -p$

Ecuación del eje: $x = 0$

Lado recto: $\overline{LR} = |4p|$

Concavidad

- Si $p > 0$ entonces la parábola es cóncava hacia arriba.
- Si $p < 0$ entonces la parábola es cóncava hacia abajo.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra los elementos y grafica la parábola cuya ecuación es $y^2 - 8x = 0$.

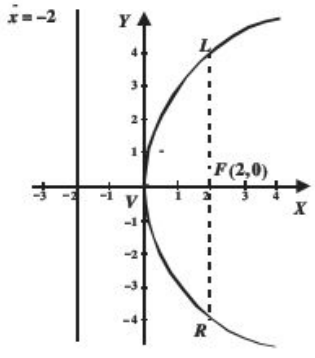
Solución

Se escribe la ecuación en su forma canónica: $y^2 = 4px$

$$y^2 - 8x = 0 \qquad \rightarrow \qquad y^2 = 8x$$

Donde $4p = 8 \rightarrow p = 2$

Es una parábola horizontal y abre hacia la derecha, al sustituir en las fórmulas se obtienen sus elementos y posteriormente su gráfica.



Foco: $F(p, 0) = F(2, 0)$

Directriz: $x = -p \rightarrow x = -2$

Lado recto: $LR = |4(2)| = 8$

Eje: $y = 0$

2 ●●○ Encuentra los elementos y grafica la parábola cuya ecuación es: $3x^2 - 12y = 0$.

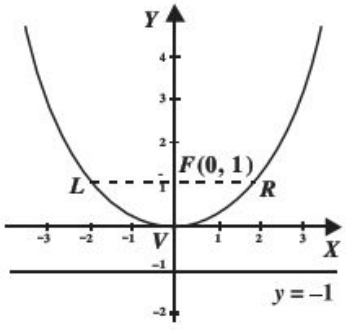
Solución

Se escribe la ecuación en su forma canónica: $x^2 = 4py$

$$3x^2 - 12y = 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 = 12y \quad \rightarrow \quad x^2 = 4y$$

Donde $4p = 4$, entonces $p = 1$.

Es una parábola vertical y abre hacia arriba, al sustituir en las fórmulas se determinan los elementos y posteriormente la gráfica:



Foco: $F(0, p) = F(0, 1)$

Directriz: $y = -p \rightarrow y = -1$

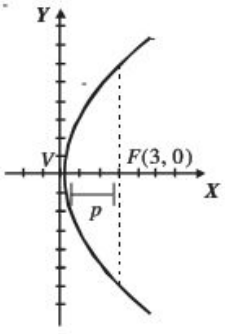
Lado recto: $LR = |4(1)| = 4$

Eje: $x = 0$

3 ●●○ Determina la ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco en el punto (3, 0).

Solución

Se grafican los elementos dados, se deduce que la parábola es cóncava hacia la derecha y el valor del parámetro es $p = 3$, al sustituir en la ecuación $y^2 = 4px$, se obtiene:



$y^2 = 4px$

$y^2 = 4(3)x$

$y^2 = 12x$

$y^2 - 12x = 0$

Otra forma de resolver este problema es igualar el foco de la parábola horizontal con la coordenada del foco dado:

$$F(p, 0) = F(3, 0), \text{ por tanto, } p = 3$$

Al sustituir el valor de $p = 3$ en la ecuación $y^2 = 4px$, se determina que:

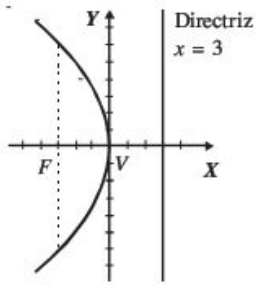
$$y^2 = 12x$$

Por consiguiente, la ecuación de la parábola es: $y^2 - 12x = 0$.

4 ●●○ Obtén la ecuación de la parábola con vértice en el origen y directriz en la recta $x - 3 = 0$.

Solución

Al graficar la directriz $x = 3$ y localizar el vértice se deduce que la parábola es horizontal y abre hacia la izquierda, por tanto, $p = -3$, al sustituir en la fórmula $y^2 = 4px$, la ecuación resultante es:



$$y^2 = 4px$$
$$y^2 = 4(-3)x$$
$$y^2 = -12x$$
$$y^2 + 12x = 0$$

Finalmente, la ecuación de la parábola es: $y^2 + 12x = 0$.

5 ●●○ Una parábola de vértice en el origen pasa por el punto (2, 3) y su eje coincide con el eje *Y*. Determina su ecuación.

Solución

El eje coincide con el eje *Y*, entonces la parábola es vertical. Si pasa por el punto (2, 3), dicho punto cumple con la ecuación $x^2 = 4py$; por tanto, se sustituye para despejar p.

$$x^2 = 4py \quad \rightarrow \quad (2)^2 = 4p(3)$$
$$4 = 12p$$
$$p = \frac{1}{3}$$

Al conocer el parámetro se determina la ecuación:

$$x^2 = 4py \quad \rightarrow \quad x^2 = 4\left(\frac{1}{3}\right)y$$
$$x^2 = \frac{4}{3}y$$
$$3x^2 - 4y = 0$$

Por consiguiente, la ecuación de la parábola es: $3x^2 - 4y = 0$.

6 ●●○ Calcula la longitud de la cuerda determinada por la parábola $x^2 + 8y = 0$ y la recta de ecuación $x - 2y - 8 = 0$.

Solución

La cuerda es un segmento de la recta dada, se encuentran los puntos de intersección con la parábola al despejar x o y de la ecuación de la recta y sustituir en la cuadrática.

Se despeja y de $x - 2y - 8 = 0 \rightarrow y = \dfrac{8 - x}{-2}$

Se sustituye en $x^2 + 8y = 0$, se simplifica y se resuelve la ecuación:

$$x^2 + 8\left(\frac{8-x}{-2}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 4(8 - x) = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + 4x - 32 = 0$$

Al factorizar:

$$(x + 8)(x - 4) = 0$$

$$x + 8 = 0; \qquad x - 4 = 0$$

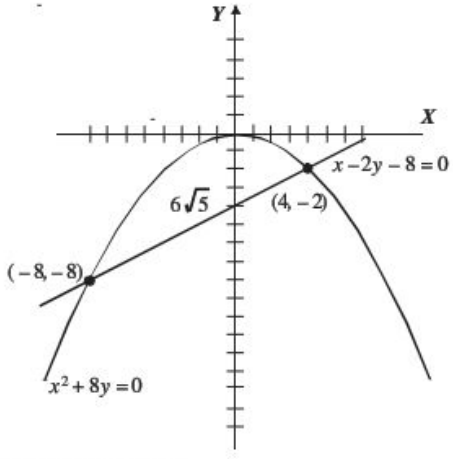
$$x = -8 \qquad x = 4$$

Al sustituir estos valores en $y = \dfrac{8 - x}{-2}$, se obtiene:

$$\text{Si } x = -8,\ y = \frac{8-(-8)}{-2} = \frac{16}{-2} = -8 \qquad \text{Si } x = 4,\ y = \frac{8-(4)}{-2} = \frac{4}{-2} = -2$$

Los puntos de intersección son: $(-8, -8)$ y $(4, -2)$.

Gráfica:



Se determina la distancia entre los puntos obtenidos:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(4 - (-8))^2 + (-2 - (-8))^2}$$

$$d = \sqrt{144 + 36}$$

$$d = \sqrt{180}$$

$$d = 6\sqrt{5}$$

Por tanto, la longitud de la cuerda es $6\sqrt{5}$ unidades.

EJERCICIO 26

Grafica y determina las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz, la longitud del lado recto y la ecuación del eje de cada una de las siguientes parábolas:

1. $y^2 = -4x$
2. $x^2 = 12y$
3. $y^2 - 20x = 0$
4. $x^2 = 16y$
5. $3y^2 + 48x = 0$
6. $2x^2 + 16y = 0$
7. $x^2 + 6y = 0$
8. $2y^2 - 16x = 0$
9. $24y = 8x^2$
10. $3x^2 + 8y = 0$
11. $y^2 = 5x$
12. $x = -y^2$
13. $y = x^2$

Encuentra las ecuaciones de las parábolas con los datos dados:

14. Vértice en el origen y foco en el punto $(-5, 0)$
15. Vértice en el origen y foco en el punto $(0, 6)$
16. Vértice en el origen y foco en el punto $(2, 0)$
17. Vértice en el origen y foco en el punto $(0, -1)$
18. Vértice en el origen y foco en el punto $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$
19. Vértice en el origen y foco en el punto $\left(0, -\frac{7}{3}\right)$
20. Vértice en el origen y directriz en la recta $y + 2 = 0$
21. Vértice en el origen y directriz en la recta $x - 6 = 0$
22. Vértice en el origen y directriz en la recta $2y - 5 = 0$
23. Vértice en el origen y directriz en la recta $2x - 3 = 0$
24. Foco en el punto $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ y directriz en la recta $3x + 4 = 0$
25. Foco en el punto $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ y directriz en la recta $4y + 1 = 0$
26. Vértice en el origen, su eje coincide con el eje X y pasa por el punto $(-2, 6)$
27. Vértice en el origen, pasa por el punto $(-2, -1)$ y su eje coincide con el eje Y
28. Vértice en el origen, foco sobre el eje X y pasa por el punto $(3, 4)$
29. Vértice en el origen, foco sobre el eje Y y pasa por el punto $\left(-2, -\frac{3}{4}\right)$

Resuelve los siguientes problemas:

30. Calcula la longitud de la cuerda de la parábola $x^2 - 12y = 0$, la cual es un segmento de la recta $3x - 2y - 12 = 0$
31. Obtén la longitud de la cuerda de la parábola $x - y^2 = 0$, la cual es un segmento de la recta $x - y - 6 = 0$
32. Una parábola tiene su vértice en el origen e interseca a la recta $x + 4y - 9 = 0$, en el punto donde su abscisa es la mitad de su ordenada. Encuentra la ecuación de la parábola (dos soluciones).
33. Determina la ecuación de la parábola con eje horizontal y vértice en el origen, que pase por los puntos de intersección de la curva $x^2 + y^2 - 18 = 0$, y la recta $x - y = 0$ (dos soluciones).
34. Obtén la ecuación de la parábola de vértice en el origen y cuyo lado recto es el diámetro vertical de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 27 = 0$
35. Determina la ecuación de la parábola de vértice en el origen y que tiene como lado recto el diámetro horizontal de la circunferencia: $x^2 + y^2 - 4y - 12 = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuación de la parábola con vértice en el punto (h, k)

Sea una parábola con vértice fuera del origen en (h, k), coordenadas del foco $F(h + p, k)$ donde p es el parámetro y su directriz $x = h - p$. Toma un punto $P(x, y)$ que cumpla con la condición de que la distancia al foco y a la directriz sea la misma, es decir:

$$\overline{PF} = \overline{PD}$$

Al aplicar la fórmula de distancia entre dos puntos, $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, y la de distancia de un punto a una recta $d = \dfrac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, se obtienen las distancias del punto P al foco y a la directriz.

La distancia de P al foco es:

$$\overline{PF} = \sqrt{(x - (h + p))^2 + (y - k)^2}$$

La distancia de P a la recta $x - h + p = 0$ es:

$$\overline{PF} = \frac{1(x) + 0(y) - h + p}{\sqrt{(1)^2 + (0)^2}} = x - h + p$$

Se igualan las distancias:

$$\sqrt{(x - (h + p))^2 + (y - k)^2} = x - h + p$$

Al elevar al cuadrado cada miembro y simplificar se obtiene:

$$\left(\sqrt{(x - h - p)^2 + (y - k)^2}\right)^2 = (x - h + p)^2$$

$$(x - h - p)^2 + (y - k)^2 = x^2 + h^2 + p^2 - 2hx + 2px - 2hp$$

$$x^2 + h^2 + p^2 - 2hx - 2px + 2hp + y^2 - 2ky + k^2 - x^2 - h^2 - p^2 + 2hx - 2px + 2hp = 0$$

$$y^2 - 4px - 2ky + 4hp + k^2 = 0$$

$$y^2 - 2ky + k^2 = 4px - 4hp$$

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

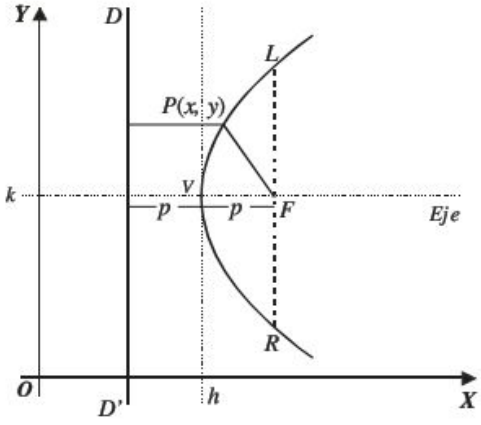
En forma análoga para una parábola con vértice fuera del origen en (h, k), coordenadas del foco en $F(h, k + p)$ y directriz en la recta $y = k - p$, se obtiene:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Elementos y ecuación de una parábola con vértice en (h, k)

Parábola horizontal

Su eje es paralelo al eje X y es cóncava hacia la derecha o izquierda.



Ecuación ordinaria:

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$

Ecuación general: $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Vértice: $V(h, k)$

Foco: $F(h+p, k)$

Directriz $\left(\overline{DD'}\right)$: $x = h - p$

Eje: $y = k$

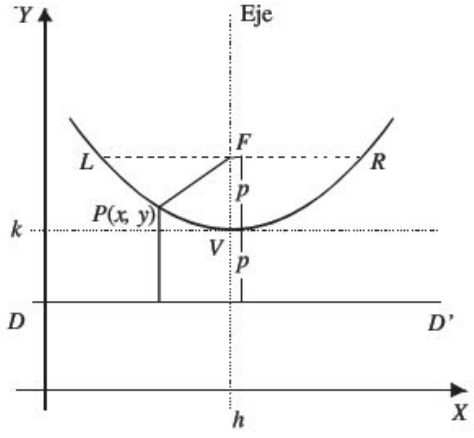
Lado recto: $LR = |4p|$

Concavidad

- Si $p > 0$ entonces la parábola es cóncava hacia la derecha.
- Si $p < 0$ entonces la parábola es cóncava hacia la izquierda.

Parábola vertical

Su eje es paralelo al eje Y, y es cóncava hacia arriba o abajo.



Ecuación ordinaria:

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$

Ecuación general: $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$

Vértice: $V(h, k)$

Foco: $F(h, k+p)$

Directriz $\left(\overline{DD'}\right)$: $y = k - p$

Eje: $x = h$

Lado recto: $LR = |4p|$

Concavidad

- Si $p > 0$ entonces la parábola es cóncava hacia arriba.
- Si $p < 0$ entonces la parábola es cóncava hacia abajo.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina los elementos y grafica la parábola $y^2 - 6y - 8x + 17 = 0$.

Solución

El término cuadrático es y, por tanto, la parábola es horizontal, entonces se agrupan los términos con y en el primer miembro de la igualdad.

$$y^2 - 6y - 8x + 17 = 0$$

$$y^2 - 6y = 8x - 17$$

Se completa el trinomio cuadrado perfecto en el primer miembro y se factoriza.

$$y^2 - 6y + 9 = 8x - 17 + 9$$

$$(y - 3)^2 = 8x - 8$$

Se factoriza el segundo miembro de la igualdad, tomando como factor común el coeficiente de la literal:

$$(y - 3)^2 = 8(x - 1)$$

La ecuación que se obtiene es de la forma: $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, por consiguiente, el vértice es el punto:

$$V(1, 3),\ 4p = 8, \text{ de donde } p = 2.$$

Se sustituye en los elementos de la parábola horizontal.

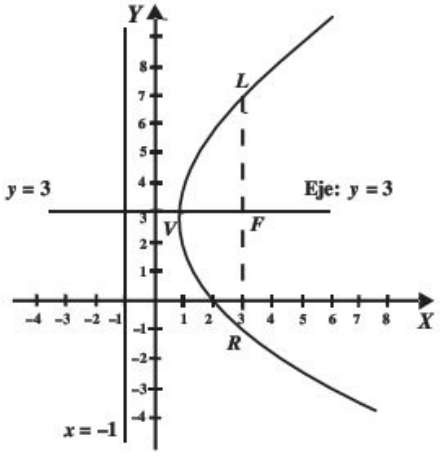
Foco: $F(h + p, k) = F(1 + 2, 3) = F(3, 3)$

Directriz: $x = h - p = 1 - 2 = -1 \rightarrow x + 1 = 0$

Lado recto: $LR = |4p| = |4(2)| = |8| = 8$

Ecuación del eje: $y = k$; $y = 3$

Gráfica:



2 ●●○ Encuentra las coordenadas del vértice, del foco, la longitud del lado recto, la ecuación de la directriz y del eje de la parábola $4x^2 + 48x + 12y + 156 = 0$.

Solución

La parábola es vertical, ya que el término cuadrático es x; para transformarla a su forma ordinaria se realiza lo siguiente:

$$4x^2 + 48x + 12y + 156 = 0 \qquad \text{Se divide la ecuación entre 4.}$$

$$x^2 + 12x + 3y + 39 = 0$$

$$x^2 + 12x = -3y - 39 \qquad \text{Se agrupan los términos en } x.$$

$$x^2 + 12x + 36 = -3y - 39 + 36 \qquad \text{Se completa el trinomio cuadrado perfecto.}$$

$$x^2 + 12x + 36 = -3y - 3$$

$$(x + 6)^2 = -3(y + 1) \qquad \text{Se factoriza cada miembro.}$$

La ecuación obtenida es de la forma: $(x - h)^2 = 4p(y - k)$, por tanto, el vértice tiene como coordenadas $V(-6, -1)$, $4p = -3$ donde $p = -\frac{3}{4}$.

Se sustituye en las fórmulas de los elementos para la parábola vertical:

Foco: $F(h, k + p) = F\left(-6, -1 + \left(-\frac{3}{4}\right)\right) = F\left(-6, -\frac{7}{4}\right)$

Directriz: $y = k - p$

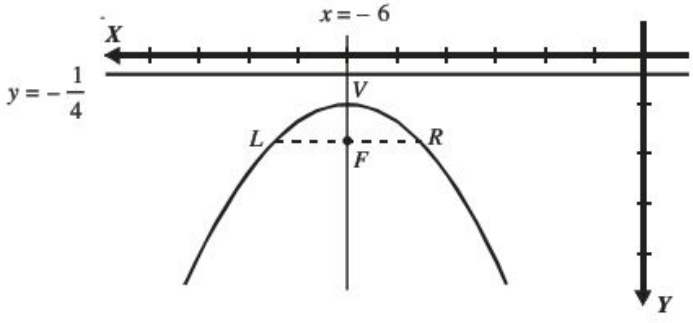
$$y = -1 - \left(-\frac{3}{4}\right) \rightarrow y = -\frac{1}{4} \rightarrow y + \frac{1}{4} = 0 \rightarrow 4y + 1 = 0$$

Lado recto: $|4p| = \left|4\left(-\frac{3}{4}\right)\right| = |-3| = 3$

Eje: $x = h$

$$x = -6 \rightarrow x + 6 = 0$$

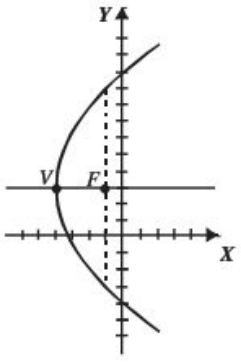
Gráfica:



3 Determina la ecuación general de la parábola cuyo vértice y foco son los puntos $(-4, 3)$ y $(-1, 3)$, respectivamente.

Solución

Se grafican los datos y se observa que la parábola tiene su eje paralelo al eje x y es cóncava hacia la derecha, por consiguiente su ecuación es de la forma $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ con $h = -4$, $k = 3$ y $p = 3$.



Al sustituir los valores en la ecuación se obtiene:

$$(y-3)^2 = 4(3)(x-(-4))$$

Forma ordinaria: $(y-3)^2 = 12(x+4)$

Se desarrolla y simplifica: $y^2 - 6y + 9 = 12x + 48$

$$y^2 - 6y + 9 - 12x - 48 = 0$$

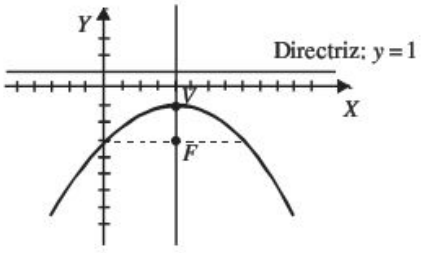
Forma general: $y^2 - 12x - 6y - 39 = 0$

Por consiguiente, la ecuación de la parábola es: $y^2 - 12x - 6y - 39 = 0$.

4 La directriz de una parábola es la recta $y - 1 = 0$, y su foco es el punto $(4, -3)$, encuentra su ecuación.

Solución

Se grafican los datos:



Al relacionar las fórmulas de los elementos de la parábola vertical con los datos, se obtienen las coordenadas del vértice y el valor del parámetro.

Foco: $F(h, k+p) = F(4, -3) \rightarrow h = 4$ y $k + p = -3$

Directriz: $y = k - p = 1 \rightarrow k - p = 1$

Se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$k + p = -3$$
$$k - p = 1$$

Los valores que se obtienen son:

$$h = 4, k = -1 \text{ y } p = -2$$

Las coordenadas del vértice son $V(4, -1)$ y el parámetro $p = -2$

Se sustituye el vértice y el parámetro en:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$
$$(x-4)^2 = 4(-2)(y+1)$$
$$(x-4)^2 = -8(y+1)$$
$$x^2 - 8x + 16 = -8y - 8$$
$$x^2 - 8x + 8y + 16 + 8 = 0$$
$$x^2 - 8x + 8y + 24 = 0$$

Por tanto, la ecuación de la parábola es: $x^2 - 8x + 8y + 24 = 0$.

EJERCICIO 27

Dadas las ecuaciones de las parábolas, determina sus elementos: vértice, foco, directriz, eje y lado recto.

1. $y^2 - 10y - 12x + 37 = 0$
2. $x^2 - 12x + 16y + 68 = 0$
3. $y^2 + 8y + 20x + 56 = 0$
4. $x^2 + 2x + 4y - 19 = 0$
5. $y^2 - 8x - 16 = 0$
6. $x^2 - 24y + 48 = 0$
7. $x^2 + 8x - 6y + 28 = 0$
8. $y^2 - 5x + 6y + 13 = 0$
9. $4x^2 - 12x - 16y + 41 = 0$
10. $16y^2 + 8y - 24x + 49 = 0$
11. $4x^2 - 4x - 16y - 23 = 0$
12. $3y^2 + 6y - 4x + 15 = 0$
13. $2x^2 - 4y + 1 = 0$
14. $4y^2 - 5x + 5 = 0$

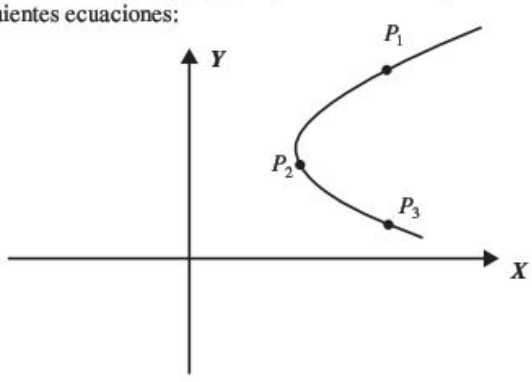
Resuelve los siguientes problemas:

15. Encuentra la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto $V(2, 4)$ y su foco $F(-3, 4)$
16. Obtén la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto $V(3, -1)$ y su foco $F(3, -5)$
17. Encuentra la ecuación de la parábola cuyo vértice y foco son los puntos (3, 2) y (5, 2), respectivamente.
18. Obtén la ecuación de la parábola cuyo vértice y foco son los puntos $(-5, 2)$ y $(-5, 5)$
19. Determina la ecuación de la parábola cuyo vértice y foco son los puntos $(2, -4)$ y $\left(\frac{5}{2}, -4\right)$
20. Determina la ecuación de la parábola cuyo vértice y foco son los puntos $(-3, -2)$ y $\left(-3, \frac{1}{3}\right)$
21. El foco de una parábola es el punto $(-2, 6)$ y su directriz $x = 10$. Encuentra su ecuación.
22. Obtén la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto (4, 5) y su directriz la recta $y + 3 = 0$
23. Determina la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto $(6, -4)$ y su directriz la recta $x + 4 = 0$
24. El foco de una parábola es el punto $(0, -6)$ y su directriz la recta $y - 8 = 0$. Obtén su ecuación.
25. Determina la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto $(-5, 2)$ y su directriz $x = 2$
26. Encuentra la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto (7, 3) y su directriz la recta $y + 2 = 0$
27. Determina la ecuación de la parábola con vértice en el punto $(1, -3)$ y directriz la recta $y + 5 = 0$
28. Obtén la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto $(-3, 5)$, su lado recto mide 24 unidades y su eje es paralelo al eje Y (dos soluciones).
29. Determina la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto (5, 2) y su foco es el centro de la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$
30. Determina la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto $(3, -2)$ y su vértice es el centro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 20 = 0$
31. Encuentra los puntos de intersección de la parábola $y^2 - 8y - 16x + 64 = 0$ con la recta $4x + y - 24 = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuación de la parábola que pasa por tres puntos

Dados tres puntos P_1, P_2 y P_3, que pertenecen a una parábola horizontal o vertical, su ecuación se obtiene mediante las siguientes ecuaciones:



Ecuaciones generales de la parábola

Parábola horizontal:

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Parábola vertical:

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0$$

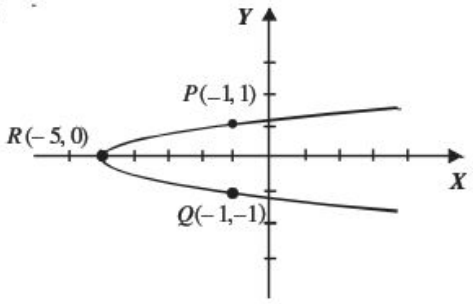
EJEMPLOS

Ejemplos 1

Determina la ecuación general de la parábola cuyo eje es paralelo al eje X y que pasa por los puntos: $P(-1, 1)$, $Q(-1, -1)$ y $R(-5, 0)$

Solución

Al graficar los puntos se obtiene:



El eje de la parábola es paralelo al eje X, entonces la parábola es horizontal y la ecuación que se utiliza es:

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Al sustituir los puntos $P(-1, 1)$, $Q(-1, -1)$ y $R(-5, 0)$, se obtienen tres ecuaciones con tres incógnitas:

Para el punto $P(-1, 1)$ $\quad (1)^2 + D(-1) + E(1) + F = 0$

Ecuación 1: $\quad -D + E + F = -1$

Para el punto $Q(-1, -1)$ $\quad (-1)^2 + D(-1) + E(-1) + F = 0$

Ecuación 2: $\quad -D - E + F = -1$

Para el punto $R(-5, 0)$ $\quad (0)^2 + D(-5) + E(0) + F = 0$

Ecuación 3: $\quad -5D + 0E + F = 0$

Se obtiene un sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -D + E + F &= -1 \\ -D - E + F &= -1 \\ -5D + 0E + F &= 0 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema se obtiene: $D = -\frac{1}{4}$, $E = 0$, $F = -\frac{5}{4}$.

Se sustituyen estos valores en $y^2 + Dx + Ey + F = 0$ y se simplifica:

$$y^2 - \frac{1}{4}x + 0y - \frac{5}{4} = 0 \quad \rightarrow \quad 4y^2 - x - 5 = 0$$

Por tanto, la ecuación de la parábola es: $4y^2 - x - 5 = 0$.

EJERCICIO 28

Determina la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje *X* y pasa por los puntos:

1. (1, 0), (9, 2) y (0, – 1)
2. (0, 0), (1, – 2) y (4, – 4)
3. (19, 2), (10, – 1) y (7, 0)
4. (12, – 4), (21, 5) y (5, 3)

Obtén la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje *Y* y pasa por los puntos:

5. (1, 0), (5, 8) y (– 2, 15)
6. (3, 10), (0, 1) y (– 2, 5)
7. (0, 1), (– 2, 3) y (1, 6)
8. $\left(0, \frac{5}{2}\right)$, (1, 6) y (– 3, – 2)

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

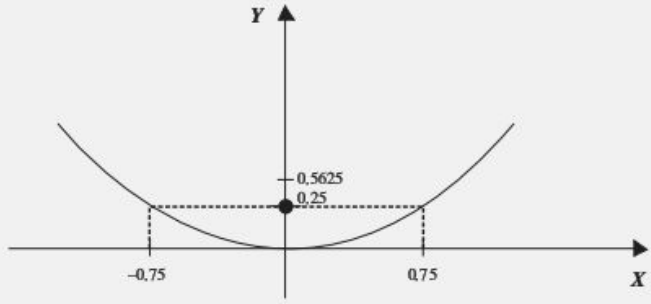
PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

A continuación se dan ejemplos de problemas donde se aplica el concepto de parábola.

1 El diámetro de una antena parabólica es de 1.5 metros y su profundidad es de 25 centímetros. ¿A qué altura se debe colocar el receptor?

Solución

La reflexión es una de las propiedades importantes de la parábola. Cuando una onda emana del foco y choca con la parábola se produce una reflexión paralela al eje y viceversa si la onda viaja paralela al eje, al chocar con la parábola, se refleja y cruza por el foco. Luego, si se gira una parábola sobre su eje, se obtiene una superficie en revolución llamada paraboloide, es la forma que tienen precisamente las antenas parabólicas.



Se construye una parábola con vértice en el origen y eje vertical, si el diámetro de la antena es de 1.5 metros y su fondo mide 25 cm, entonces la parábola por ser simétrica, pasa por los puntos (– 0.75, 0.25) y (0.75, 0.25), por tanto sustituimos uno de estos puntos en la ecuación:

$$x^2 = 4py, \text{ para despejar } p.$$

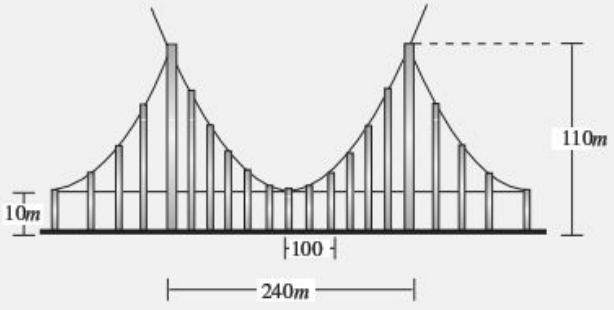
$$x^2 = 4py$$

$$(-0{,}75)^2 = 4p(0{,}25)$$

$$p = 0\ .5625$$

Las coordenadas del foco están dadas por $F(0, 0.5625)$, por consiguiente, se debe colocar el receptor a 56.25 centímetros del vértice.

2 Las dos torres de un puente colgante, como se muestra en la figura tienen una separación de $240m$ y una altura de $110m$, si el puntal más corto mide $10m$ determina la altura de un puntal que se encuentra a $100m$ del centro.

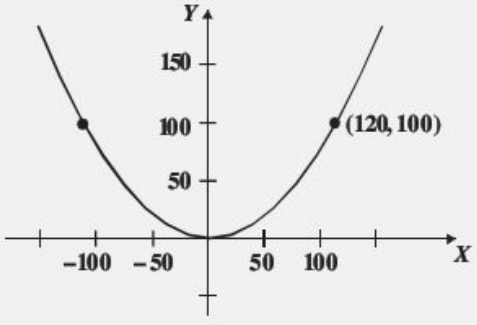


Solución

Se construye una parábola con vértice en el origen y eje vertical, si las torres están separadas $240m$ y su altura con respecto al vértice de la parábola es de $100m$ ($110\text{m} - 10m = 100m$), entonces la parábola pasa por los puntos:

$$(-120, 100) \text{ y } (120, 100)$$

Se sustituye el punto (120, 100) en la ecuación $x^2 = 4py$ para obtener p.



$$x^2 = 4py$$

$$(120)^2 = 4p(100)$$

$$p = 36$$

Por tanto, la ecuación es

$$x^2 = 4(36)y \quad \rightarrow \quad x^2 = 144y$$

Para encontrar la ordenada cuya abscisa es $x = 100$, se sustituye en la ecuación obtenida:

$$(100)^2 = 144y$$

$$y = 69.44$$

El puntal que se encuentra a 100 metros del centro mide:

$$69.44m + 10m = 79.4m$$

Ecuación de una recta tangente a una parábola

Si se tiene una parábola con vértice en el origen y una recta tangente en el punto (x_0, y_0), la ecuación de la recta está dada por:

$$\text{Horizontal: } y - y_0 = \frac{y_0}{2x_0}(x - x_0) \qquad \text{Vertical: } y - y_0 = \frac{2y_0}{x_0}(x - x_0)$$

Si se tiene una parábola con vértice (h, k) fuera del origen y una recta tangente en el punto (x_0, y_0), la ecuación de la recta está dada por:

$$\text{Horizontal: } y - y_0 = \frac{y_0 - k}{2(x_0 - h)}(x - x_0) \qquad \text{Vertical: } y - y_0 = \frac{2(y_0 - k)}{x_0 - h}(x - x_0)$$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

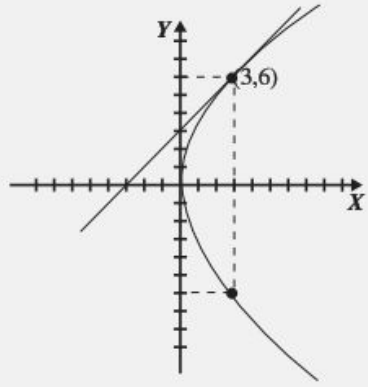
1 Determina la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 - 12x = 0$, en el punto (3, 6).

Solución

Se sustituye el punto (3, 6) en la fórmula:

$$y - y_0 = \frac{y_0}{2x_0}(x - x_0)$$

$$y - 6 = \frac{6}{2(3)}(x - 3)$$



De donde se obtiene la ecuación:

$$x - y + 3 = 0$$

2 Determina la ecuación de la recta tangente a la parábola $4x^2 + 5y = 0$, en el punto $(5, -20)$.

Solución

Se sustituye el punto $(5, -20)$ en la fórmula:

$$y - y_0 = \frac{2y_0}{x_0}(x - x_0) \quad \rightarrow \quad y - (-20) = \frac{2(-20)}{5}(x - 5) \quad \rightarrow \quad 8x + y - 20 = 0$$

Por tanto, la ecuación de la recta es: $8x + y - 20 = 0$.

3 Encuentra la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2 - 8x + 8y + 24 = 0$, en el punto $(8, -3)$.

Solución

Se transforma la ecuación de la parábola a su forma ordinaria.

$$x^2 - 8x + 8y + 24 = 0 \quad \rightarrow \quad (x - 4)^2 = -8(y + 1)$$

Se sustituye el vértice $V(h, k) = V(4, -1)$ y el punto $(8, -3)$ en la fórmula y se obtiene:

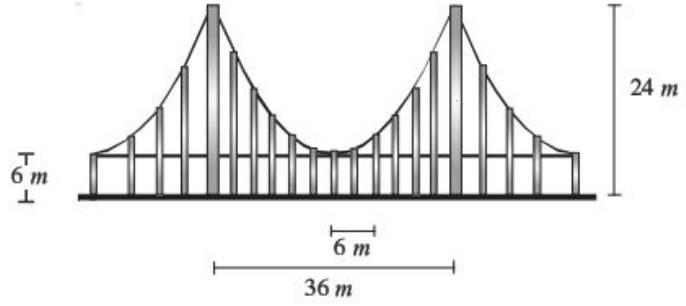
$$y - y_0 = \frac{2(y_0 - k)}{x_0 - h}(x - x_0) \quad \rightarrow \quad y - (-3) = \frac{2(-3 - (-1))}{8 - 4}(x - 8) \rightarrow x + y - 5 = 0$$

En consecuencia, la ecuación de la recta es: $x + y - 5 = 0$.

EJERCICIO 29

Resuelve los siguientes problemas:

1. Dos torres de 24 metros de altura sostienen un puente colgante, como el que se muestra en la figura. Si las torres están separadas 36 metros y el puntal más corto mide 6 metros, ¿cuál es la altura de un puntal que se encuentra a 6 metros del centro?



2. El diámetro de una antena parabólica es de 2 *m* y su profundidad es de 40 *cm*. ¿A qué altura se debe colocar el receptor?
3. Se desea diseñar un faro que tenga 30 centímetros de diámetro. El filamento de la bombilla se encuentra a 3 *cm* del vértice. ¿Qué profundidad debe tener el faro si se quiere que el filamento quede justo en la posición de su foco?
4. Si en el ejercicio anterior se quiere que el faro tenga 2.75 *cm* menos de profundidad, ¿cuánto debe medir el diámetro?
5. Determina la ecuación de la recta tangente a la parábola $x^2 - 8y = 0$ en el punto (4, 2)
6. Obtén la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 - 6x = 0$ en el punto (24, 12)
7. Determina la ecuación de la recta tangente a la parábola $x^2 - 4x - 8y + 28 = 0$ en el punto (10, 11)
8. Calcula la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 - 12x + 6y + 57 = 0$ en el punto (16, 9)
9. Determina la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 - 4x + 4y + 28 = 0$ en el punto $P(15, 4)$
10. Obtén la ecuación de la recta tangente a la parábola $x^2 - 8x - 6y + 4 = 0$ en el punto $\left(6, -\frac{4}{3}\right)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente