

6

deformación en vigas

6-1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se estudia la rigidez de las vigas. Frecuentemente, el diseño de una viga queda determinado más por su rigidez que por su resistencia. Por ejemplo, al diseñar elementos de máquina para trabajos de precisión, tales como tornos, prensas, limadoras, etc., las deformaciones deben permanecer por debajo de las tolerancias admisibles del trabajo que se va a realizar. Asimismo, en las vigas de pisos que tengan por debajo cielo raso de yeso o escayola, se suele limitar la deflexión máxima a $1/360$ de claro, para que no aparezcan grietas en el yeso. Una de las más importantes aplicaciones del estudio de la deformación de las vigas es, por otra parte, la obtención de ecuaciones de deformación que, junto con las condiciones de equilibrio estático, permitan resolver las vigas estáticamente indeterminadas. (Véanse los Caps. 7 y 8.)

Se utilizan varios métodos para determinar la deformación de las vigas. Aunque basados en los mismos principios, difieren en su técnica y en sus objetivos inmediatos. En primer lugar, se estudia un procedimiento modernizado del método de la doble integración, que simplifica mucho su aplicación. Otro método, el del área de momentos, se considera el más directo de todos, en especial si se desea conocer la deformación en un punto determinado. Después de un estudio previo del diagrama de momentos por partes (Sec. 6-4) se verá cómo es no solamente muy sencillo, sino extremadamente rápido. Otra variante de este método, que se estudiará en la sección 8-7, es también rápido y cómodo de aplicar.

Otros métodos son el de la viga conjugada y el de superposición. El método de la viga conjugada es realmente una variante del método del área de momentos, pero difiere en su aplicación práctica. El método de superposición no es un método distinto; utiliza las fórmulas obtenidas para las deformaciones, en ciertos tipos fundamentales de cargas, para obtener las soluciones correspondientes a cargas que sean combinaciones de estos tipos fundamentales.

6-2. MÉTODO DE LA DOBLE INTEGRACIÓN

La vista lateral de la superficie neutra de una viga deformada se llama *curva elástica*, o simplemente, *elástica* de la viga. Es la curva que forma el eje longitudinal, inicialmente recto. Se muestra sumamente exagerada en la figura 6-1. En esta sección se deduce la ecuación de dicha curva, y cómo calcular el desplazamiento vertical o deflexión y de cualquier punto en función de su abscisa x .

Tomemos el extremo izquierdo como origen del eje X , dirigido según la dirección inicial de la viga sin deformar, y el eje Y positivo hacia arriba. Se supone siempre que las deformaciones son tan pequeñas que no hay diferencia apreciable entre la longitud inicial de la viga y la proyección de su longitud deformada. En consecuencia, la curva elástica es muy llana y su pendiente en cualquier punto también es muy pequeña. El valor de esta pendiente, $\tan \theta = dy/dx$, puede hacerse sin error apreciable, igual a θ . Por consiguiente,

$$\theta = \frac{dy}{dx} \quad (a)$$

y

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad (b)$$

Considerando la variación de θ en una longitud diferencial ds , producida por la flexión de la viga, es evidente que

$$ds = \rho d\theta \quad (c)$$

siendo ρ el radio de curvatura en la longitud de arco ds . Como la curva elástica es casi recta, ds es prácticamente igual a dx . En estas condiciones, de las ecuaciones (b) y (c) se obtiene:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} \approx \frac{d\theta}{dx} \quad \text{o bien,} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad (d)$$

Al deducir la fórmula de la flexión, en la sección 5-2, se obtuvo la relación

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (5-1)$$

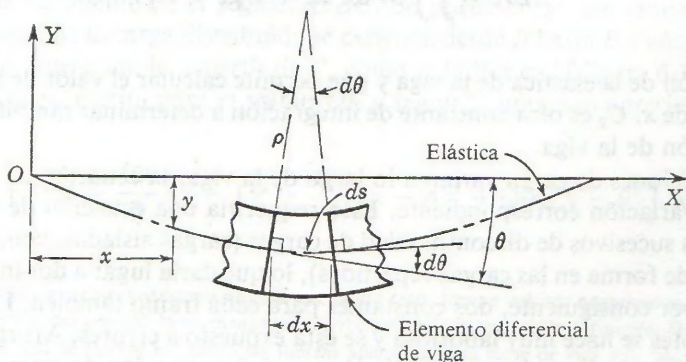


Figura 6-1.

y, por tanto, igualando los valores $1/\rho$ de las ecuaciones (d) y (5-1) resulta:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M \quad (6-1)$$

Esta es la ecuación diferencial de la elástica de una viga. El producto EI , que se llama *rigidez a la flexión*, es normalmente constante a lo largo de la viga.

Las aproximaciones hechas, el ángulo por la tangente, y dx por ds , no tienen influencia apreciable en la exactitud de la expresión (6-1) y, en efecto, sustituyendo $1/\rho$ por su valor exacto, junto con la ecuación (5-1), se tendría

$$\frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{M}{EI}$$

Teniendo en cuenta que dy/dx es muy pequeño, su cuadrado es despreciable frente a la unidad, por lo que se puede escribir

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

que coincide con la ecuación (6-1).

Integrando la ecuación (6-1), suponiendo EI constante, resulta

$$EI \frac{dy}{dx} = \int M dx + C_1 \quad (6-2)$$

que es la ecuación de la pendiente, y que permite determinar el valor de la misma, o dy/dx en cualquier punto. Conviene observar que en esta ecuación, M no es un valor del momento, sino la ecuación del momento flexionante en función de x , y C_1 es una constante a determinar por las condiciones de apoyo.

Integrando de nuevo la ecuación (6-2),

$$EI y = \int \int M dx dx + C_1 x + C_2 \quad (6-3)$$

que es la ecuación de la elástica de la viga y que permite calcular el valor de la ordenada y en cualquier valor de x . C_2 es otra constante de integración a determinar también por las condiciones de sujeción de la viga.

Si las condiciones de carga varían a lo largo de la viga, la ecuación de momentos también tendrá la variación correspondiente. Esto requeriría una ecuación de momentos entre cada dos puntos sucesivos de discontinuidad de cargas (cargas aisladas, comienzo o terminación, o cambio de forma en las cargas repartidas), lo que daría lugar a dos integraciones para cada tramo y, por consiguiente, dos constantes para cada tramo también. La determinación de estas constantes se hace muy laboriosa y se está expuesto a errores. Afortunadamente, estas complicaciones pueden evitarse escribiendo una única ecuación de momentos válida para toda la viga, pese a las discontinuidades de carga.

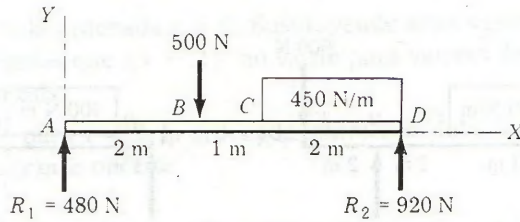


Figura 6-2.

Consideremos, por ejemplo, la viga de la figura 6-2. Aplicando la definición $M = (\Sigma M)_{izq}$, se deduce que las ecuaciones de los momentos entre cada dos puntos de discontinuidad de cargas son:

$$M_{AB} = 480x \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC} = [480x - 500(x - 2)] \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{CD} = \left[480x - 500(x - 2) - \frac{450}{2}(x - 3)^2 \right] \text{ N}\cdot\text{m}$$

Obsérvese que la ecuación para el tramo CD también es válida en los otros dos, AB y BC , si los términos $(x - 2)$ y $(x - 3)^2$ no se tienen en cuenta para valores de x menores que 2 y 3, respectivamente. En otras palabras, los términos $(x - 2)$ y $(x - 3)^2$ no tienen existencia para valores de x que hagan negativo al paréntesis.

Como indicación de este convencionalismo vamos adoptar la notación con paréntesis angulares $\langle \rangle$ para estos términos, en vez de los paréntesis normales. Con este cambio de notación se obtiene la única ecuación de momentos siguiente:

$$M = \left(480x - 500\langle x - 2 \rangle - \frac{450}{2}\langle x - 3 \rangle^2 \right) \text{ N}\cdot\text{m}$$

válida para toda la viga.*

Veamos otro ejemplo. Consideremos la viga de la figura 6-3a, en la cual la carga distribuida se extiende solamente en el segmento BC . Se puede crear, sin embargo, una continuidad suponiendo que la carga distribuida se extiende desde B hasta E y añadiendo una carga igual y opuesta, que la anule, a partir de C , como se indica en la figura 6-3b. La ecuación general de momentos, escrita para el tramo DE y según la notación anterior, es:

$$M = \left(500x - \frac{400}{2}\langle x - 1 \rangle^2 + \frac{400}{2}\langle x - 4 \rangle^2 + 1300\langle x - 6 \rangle \right) \text{ N}\cdot\text{m}$$

* Prescindir de los términos entre paréntesis angulares cuando éstos toman valores negativos tiene su justificación en el hecho de que la ecuación general de momentos se escribe teniendo en cuenta la definición $M = (\Sigma M)_{izq}$, lo que significa que solamente han de tenerse en cuenta las fuerzas aplicadas en la parte de viga a la izquierda de la sección. Ahora bien, un valor negativo en un término entre paréntesis angulares indica que la carga está situada a la derecha de la sección, por lo que no hay que considerarla para la determinación del momento. Un valor cero del paréntesis indica que empieza una carga repartida o la existencia de una carga concentrada.

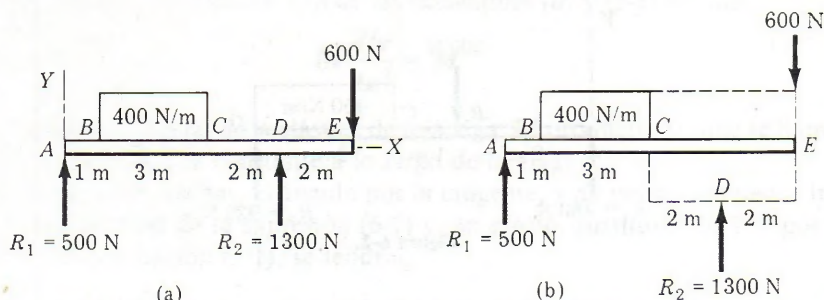


Figura 6-3. Procedimiento para establecer la continuidad de las cargas.

en donde los términos entre paréntesis angulares no tienen existencia para valores de x que hagan negativos a los paréntesis, no a su exponente. Obsérvese cómo todas las cargas quedan automáticamente incluidas en la ecuación de momentos al escribir ésta para el último tramo de la derecha de la viga.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

601. Una carga concentrada de 300 N está apoyada como se indica en la figura 6-4. Determinar las ecuaciones de la elástica y la máxima deflexión de la viga.

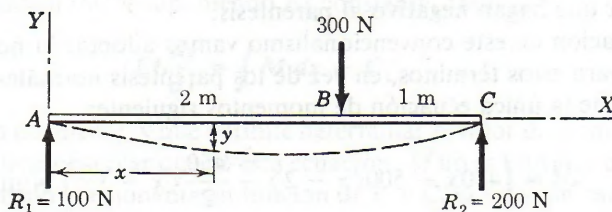


Figura 6-4.

Solución: Escribiendo la ecuación general de momentos para el último tramo BC de la viga, aplicando la ecuación diferencial de la elástica e integrando dos veces, se obtienen las siguientes expresiones para la pendiente y las ordenadas:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M = (100x - 300\langle x - 2 \rangle) \text{ N} \cdot \text{m} \quad (a)$$

$$EI \frac{dy}{dx} = (50x^2 - 150\langle x - 2 \rangle^2 + C_1) \text{ N} \cdot \text{m}^2 \quad (b)$$

$$EIy = \left(\frac{50}{3}x^3 - 50\langle x - 2 \rangle^3 + C_1x + C_2 \right) \text{ N} \cdot \text{m}^3 \quad (c)$$

Para determinar las dos constantes de integración, que son físicamente iguales a la pendiente y a la ordenada en el origen, se aplican las condiciones de frontera siguientes:

1. En A , para $x = 0$, la ordenada $y = 0$. Sustituyendo estos valores en la ecuación (c) se obtiene $C_2 = 0$. Recordemos que $\langle x - 2 \rangle^3$ no existe para valores de x menores que 2, que harían negativo el paréntesis.

2. En el otro apoyo, para $x = 3$, la ordenada también es nula. Conocido $C_2 = 0$ y sustituyendo en la expresión (c), se obtiene

$$0 = \frac{50}{3}(3)^3 - 50(3 - 2)^3 + 3C_1 \quad \text{o} \quad C_1 = -133 \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

Determinadas las constantes de integración y sustituidos sus valores en (b) y (c), se pueden escribir las expresiones de la pendiente y de la ordenada de la elástica en su forma convencional,

TRAMO AB ($0 \leq x \leq 2$)	TRAMO BC ($2 \leq x \leq 3$)
(d) $EI \frac{dy}{dx} = (50x^2 - 133) \text{ N} \cdot \text{m}^2$	(f) $EI \frac{dy}{dx} = [50x^2 - 150(x - 2)^2 - 133] \text{ N} \cdot \text{m}^2$
(e) $EIy = \left(\frac{50}{3}x^3 - 133x \right) \text{ N} \cdot \text{m}^3$	(g) $EIy = \left[\frac{50}{3}x^3 - 50(x - 2)^3 - 133x \right] \text{ N} \cdot \text{m}^3$

Calculemos ahora la máxima deflexión para lo cual se supone que se encuentra en el tramo AB . Su posición se puede determinar derivando la ecuación (e) respecto de x e igualando a cero esta derivada, o bien, igualando a cero la expresión (d) de la pendiente, es decir, hallando el punto de pendiente nula. Por tanto,

$$50x^2 - 133 = 0 \quad \text{o} \quad x = 1.63 \text{ m}$$

Puesto que este valor de x pertenece al tramo AB se confirma la hipótesis de que la máxima deflexión ocurre en este tramo. Ahora, para obtener su valor, se sustituye $x = 1.63$ en la ecuación (e), lo que da:

$$EIy_{\text{máx}} = -145 \text{ N} \cdot \text{m}^3$$

El valor negativo obtenido indica que la ordenada y está por debajo del eje X . Con frecuencia sólo interesa el valor de la deflexión, sin indicación de signo, y entonces se representa por δ , reservando la y para las ordenadas.

El producto EIy se expresa en $\text{N} \cdot \text{m}^3$, ya que proviene de la doble integración de la ecuación (6-1), en la que M se expresa en $\text{N} \cdot \text{m}$. La primera integración da $\text{N} \cdot \text{m}^2$, como unidades de $EI\theta$ correspondientes a la pendiente, y la segunda integración da, en efecto, $\text{N} \cdot \text{m}^3$.

Expresando E en N/m^2 e I en m^4 , se obtiene y en m . Por ejemplo, si $E = 10 \times 10^9 \text{ N}/\text{m}^2$ e $I = 1.5 \times 10^6 \text{ mm}^4 = 1.5 \times 10^{-6} \text{ m}^4$, el valor de y es

$$(10 \times 10^9)(1.5 \times 10^{-6})y = -145$$

de donde

$$y = -9.67 \times 10^{-3} \text{ m} = -9.67 \text{ mm}$$

602. Hallar el valor de EIy en el punto medio entre apoyos y en el extremo volado de la viga de la figura 6-5.

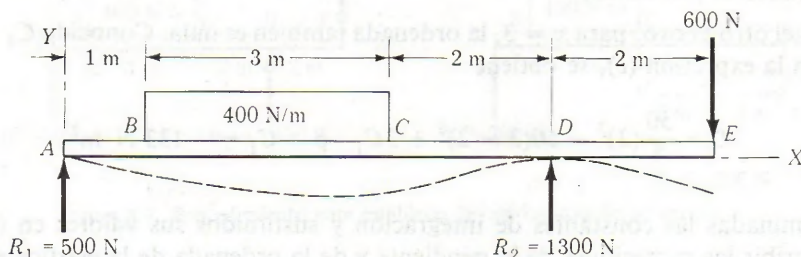


Figura 6-5.

Solución: Es la misma viga de la figura 6-3 para la que ya se había escrito la ecuación general de momentos, ecuación (h) de la sección 6-2. Aplicando la ecuación diferencial de la elástica e integrando dos veces resulta:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M = \left(500x - \frac{400}{2} \langle x - 1 \rangle^2 + \frac{400}{2} \langle x - 4 \rangle^2 + 1300 \langle x - 6 \rangle \right) \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$EI \frac{dy}{dx} = \left(250x^2 - \frac{200}{3} \langle x - 1 \rangle^3 + \frac{200}{3} \langle x - 4 \rangle^3 + 650 \langle x - 6 \rangle^2 + C_1 \right) \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

$$EIy = \left(\frac{250}{3} x^3 - \frac{50}{3} \langle x - 1 \rangle^4 + \frac{50}{3} \langle x - 4 \rangle^4 + \frac{650}{3} \langle x - 6 \rangle^3 + C_1 x + C_2 \right) \text{ N} \cdot \text{m}^3$$

Para determinar C_2 observemos que para $x = 0$, $y = 0$, lo que da $C_2 = 0$. No se tiene en cuenta los términos entre paréntesis angulares si son negativos. Aplicando la otra condición de apoyo, para $x = 6$, $y = 0$, resulta:

$$0 = \frac{250}{3} (6)^3 - \frac{50}{3} (5)^4 + \frac{50}{3} (2)^4 + 6C_1 \quad \text{o} \quad C_1 = -1308 \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

Para obtener la deflexión en el punto medio se hace $x = 3$ en la ecuación de tramo BC, en la que no se consideran los términos $\langle x - 4 \rangle^4$ y $\langle x - 6 \rangle^3$, lo que da

$$EIy = \frac{250}{3} (3)^3 - \frac{50}{3} (2)^4 - 1308(3) = -1941 \text{ N} \cdot \text{m}^3 \quad \text{Resp.}$$

Análogamente, en la ecuación del tramo DE en la que se tienen en cuenta todos los términos, se hace $x = 8$, con lo que el valor de la ordenada en el extremo es

$$EIy = \frac{250}{3} (8)^3 - \frac{50}{3} (7)^4 + \frac{50}{3} (4)^4 + \frac{650}{3} (2)^3 - 1308(8) = -1814 \text{ N} \cdot \text{m}^3 \quad \text{Resp.}$$

603. Una viga simplemente apoyada soporta una carga triangular como indica la figura 6-6a. Determinar la ecuación de la elástica y el valor de la deflexión máxima.

Solución: Por simetría, cada reacción es la mitad de la carga total $\frac{1}{2} wL$, por lo que $R_1 = R_2 = \frac{1}{4} wL$. En este ejemplo se tiene la ventaja de la simetría, ya que la elástica lo es con respecto

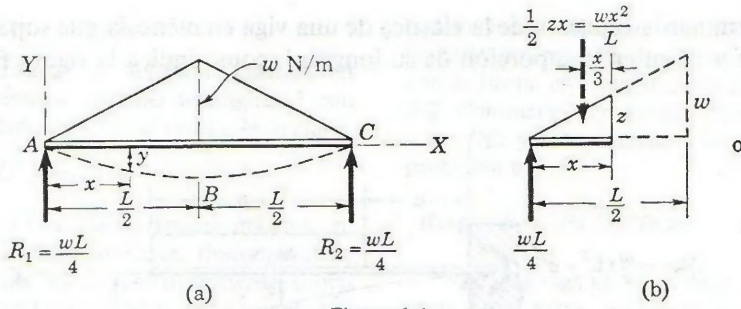


Figura 6-6.

a la vertical que pasa por el punto medio de la viga. Las condiciones de deflexión nula en A y pendiente nula en B hacen que no sea necesario establecer la ecuación general de momentos, ya que sólo se precisa la del tramo AB , y ésta se obtiene fácilmente con ayuda de la figura 6-6b.

Escribiendo la ecuación diferencial de la elástica al tramo AB e integrando dos veces resulta:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M_{AB} = \frac{wL}{4}x - \frac{wx^2}{L} \cdot \frac{x}{3} \quad (a)$$

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{wLx^2}{8} - \frac{wx^4}{12L} + C_1 \quad (b)$$

$$EIy = \frac{wLx^3}{24} - \frac{wx^5}{60L} + C_1x + C_2 \quad (c)$$

Para determinar las constantes de integración, como ya se ha dicho, para $x = 0$, $y = 0$, lo que da $C_2 = 0$. Por simetría, la pendiente en el centro $dy/dx = 0$, para $x = L/2$. Sustituyendo en (b),

$$0 = \frac{wL}{8} \left(\frac{L}{2} \right)^2 - \frac{w}{12L} \left(\frac{L}{2} \right)^4 + C_1 \text{ o bien, } C_1 = -\frac{5wL^3}{192}$$

Por tanto, la ecuación de A a B , y también de C a B , por la citada simetría, es

$$EIy = \frac{wLx^3}{24} - \frac{wx^5}{60L} - \frac{5wL^3x}{192}$$

o bien,

$$EIy = -\frac{wx}{960L} (25L^4 - 40L^2x^2 + 16x^4)$$

La ordenada máxima, en el centro para $x = L/2$, es

$$EIy = -\frac{wL^4}{120} = -\frac{WL^3}{60}$$

en donde $W = \frac{1}{2}wL$ es la carga total.

604. Determinar la ecuación de la elástica de una viga en ménsula que soporta una carga uniforme de w N/m en una porción de su longitud, como indica la figura 6-7.

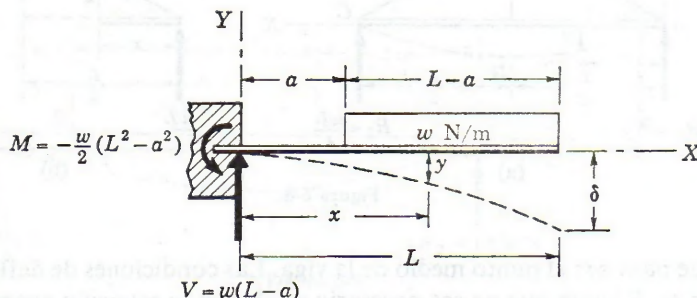


Figura 6-7.

Solución: En el empotramiento, las condiciones de equilibrio determinan los valores de M y V que son: $V = w(L - a)$ y $M = -w(L - a)(a + L - a/2) = -\frac{w}{2}(L^2 - a^2)$. En función de la ecuación general de momentos, la ecuación diferencial de la elástica es

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = w(L - a)x - \frac{w}{2}(L^2 - a^2) - \frac{w}{2}\langle x - a \rangle^2 \quad (a)$$

Integrando (a) se obtiene la ecuación de la pendiente,

$$EI \frac{dy}{dx} = w(L - a) \frac{x^2}{2} - \frac{w}{2}(L^2 - a^2)x - \frac{w}{6}\langle x - a \rangle^3 + C_1 \quad (b)$$

Como la pendiente es nula para $x = 0$, se deduce que $C_1 = 0$. Integrando de nuevo, con $C_1 = 0$, resulta la ecuación de la elástica:

$$EI y = w(L - a) \frac{x^3}{6} - \frac{w}{4}(L^2 - a^2)x^2 - \frac{w}{24}\langle x - a \rangle^4 + C_2 \quad (c)$$

En ésta, para $x = 0$ es $y = 0$, con lo que también $C_2 = 0$. Obsérvese que tomando el origen de coordenadas en el empotramiento, donde la pendiente y la ordenada son nulas, resultan también nulas las constantes de integración.

Si el valor máximo de la deflexión, en el extremo libre, es δ , es evidente que $\delta = -y$. Sustituyendo $x = L$ y simplificando resulta:

$$EI\delta = \frac{w(L - a)}{8} \left(L^3 + L^2a + La^2 - \frac{a^3}{3} \right)$$

Un valor muy interesante es cuando $a = 0$, es decir, cuando la carga repartida ocupa la totalidad de la ménsula, pues entonces la flecha en el extremo viene dada por

$$EI\delta = \frac{wL^4}{8} = \frac{WL^3}{8}$$

PROBLEMAS

605. Determinar la deflexión máxima en una viga simplemente apoyada de longitud L con una carga concentrada P en el centro de su claro.

Resp. $\delta = PL^3/48EI$

606. Determinar la deflexión máxima en una viga simplemente apoyada, de longitud L , que soporta una carga uniformemente distribuida de w N/m aplicada en toda su longitud.

Resp. $\delta = (5/384)(wL^4/EI) = (5/384)(WL^3/EI)$

607. Determinar el máximo valor de EIy en la ménsula de la figura P-607, cargada como se indica. Considerar el origen de coordenadas en el empotramiento.

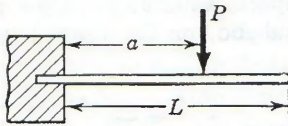


Figura P-607.

608. Obtener la ecuación de la elástica de la ménsula de la figura P-608 sometida a una carga triangular que varía desde cero en el empotramiento hasta w N/m en el extremo libre.

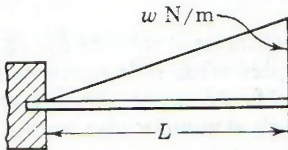


Figura P-608.

609. Como se indica en la figura P-609, una viga simplemente apoyada sostiene dos cargas

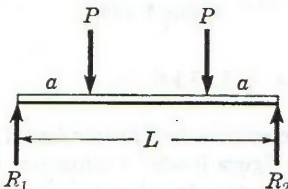


Figura P-609.

concentradas simétricamente colocadas. Calcular la deflexión máxima δ y comparar el resultado con la flecha en el centro, del caso 7 de la tabla 6-2. Contrastar el resultado obtenido, poniendo $a = L/2$ y comparándolo con la solución del problema 605.

Resp. $\delta = (Pa/24EI)(3L^2 - 4a^2)$

610. La viga apoyada de la figura P-610 soporta una carga uniforme w simétricamente distribuida en una porción de su longitud. Determinar la deflexión máxima y confrontar el resultado, poniendo $a = 0$, con la solución del problema 606.

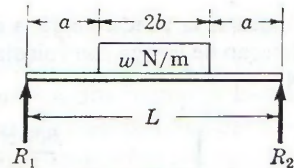


Figura P-610.

611. Calcular el valor de $EI\delta$ en el centro del claro en la viga representada en la figura P-611. Si $E = 10$ GN/m², determinar el valor de I necesario para que la deflexión en el centro no sobrepase 1/360 del claro. *Indicación:* Considerar el origen de x en el apoyo derecho siendo x positiva hacia la izquierda.

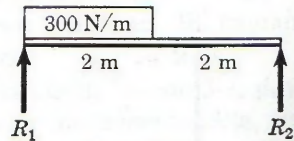


Figura P-611.

Resp. $EI\delta = 500 \text{ N} \cdot \text{m}^3$; $I = 4.50 \times 10^6 \text{ mm}^4$

612. Calcular el valor de $EI\delta$ en el centro de la viga cargada como se indica en la figura P-612.

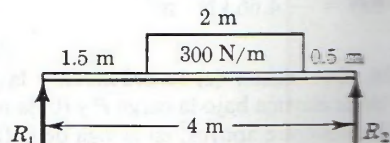


Figura P-612.

Resp. $EI\delta = 657 \text{ N} \cdot \text{m}^3$

613. Calcular el valor de EIy en el extremo derecho de la viga cargada como indica la figura P-613.

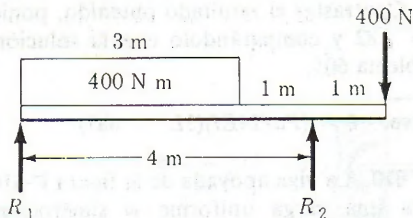


Figura P-613.

Resp. $EIy = 195 \text{ N} \cdot \text{m}^3$

614. Calcular la pendiente de la elástica en el apoyo derecho de la viga con voladizo de la figura P-614.

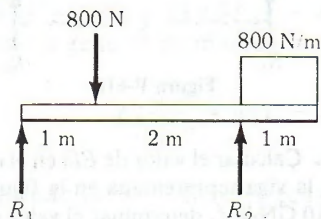


Figura P-614.

615. Calcular el valor de EIy en el centro entre apoyos de la viga con voladizo de la figura P-615.

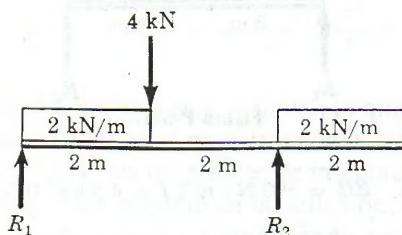


Figura P-615.

Resp. $EIy = -4.66 \text{ kN} \cdot \text{m}^3$

616. Determinar (a) la ordenada y la pendiente de la elástica bajo la carga P y (b) la máxima deflexión entre apoyos, en la viga de la figura P-616.

Resp. (b) $EIy_{\text{máx}} = Pa^2b/9\sqrt{3}$

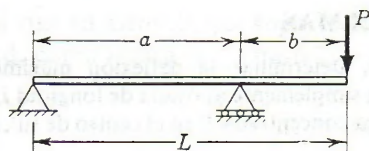


Figura P-616 y P-617.

617. Sustituir la carga P del problema 616 por un par M aplicado en el extremo derecho, y determinar la pendiente y ordenada en el mismo punto.

Resp. $EI \frac{dy}{dx} = -(M/3)(L + 2b)$; $EI \delta = (Mb/6)(2L + b)$

618. Una viga simplemente apoyada resiste la acción de un par M aplicado como se indica en la figura P-618. Determinar la ecuación de la elástica y la deflexión en el punto de aplicación del par. Después, poniendo $a = L$ y $a = 0$, comparar el resultado con los casos 11 y 12 de la Tabla 6-2.

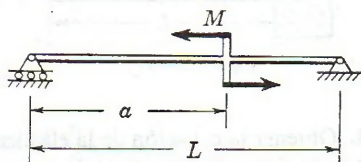


Figura P-618.

Resp. $EIy = (Ma/3L)(L^2 - 3La + 2a^2)$

619. Determinar el valor de EIy en el centro de la viga representada en la figura P-619. (Indicación: Use el hecho de que, debido a la simetría, la pendiente en el punto medio es nula.)

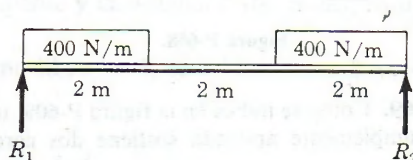


Figura P-619.

Resp. $EIy = -3.33 \text{ kN} \cdot \text{m}^3$

620. Determinar la deflexión δ en el centro de la viga de la figura P-620. Indicación: Considerar el origen de coordenadas en el centro de la viga ya deformada.

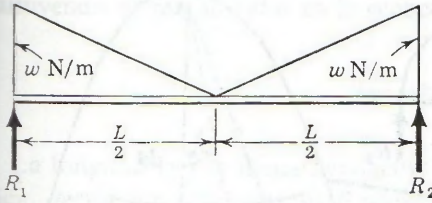


Figura P-620.

Resp. $\delta = (9/1920)(wL^4/EI)$

621. Calcular $EI\delta$ en el centro del claro, en la viga de la figura P-621. Confrontar el resultado obtenido, haciendo $a = 0$, con el resultado del problema 606. Téngase en cuenta la misma indicación del problema anterior.

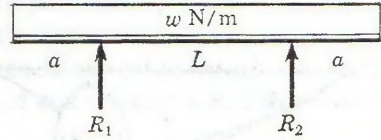


Figura P-621.

6-3. MÉTODO DEL ÁREA DE MOMENTOS

Un método muy útil y sencillo para determinar la pendiente y deflexión en las vigas es el *método del área de momentos*, en el que intervienen el área del diagrama de momentos y el momento de dicha área. Se comienza, en primer lugar, por los dos teoremas básicos de este método; luego, una vez calculadas las áreas y los momentos de estas áreas del diagrama de momentos, se aplica el método a varios tipos de problemas. El método está especialmente indicado en la determinación de la pendiente o de la deflexión en puntos determinados, más que para hallar la ecuación general de la elástica. Como en su utilización se ha de tener en cuenta la forma y relaciones geométricas en la elástica, no se pierde el significado físico de lo que se está calculando.

El método del área de momentos está sujeto a las mismas limitaciones que el de la doble integración. Sin embargo, para verlo en su totalidad, como un conjunto completamente independiente, se repite una pequeña parte de lo dicho en la sección anterior. La figura 6-8a representa una viga simplemente apoyada con una carga cualquiera. La elástica, como intersección de la superficie neutra con el plano vertical que pasa por los centroides de las secciones, se representa en la figura 6-8b, aunque sumamente exagerada. El diagrama de momentos se supone que es el representado en la figura 6-8c.

Al igual que en la deducción de la fórmula de la deflexión, sección 5-2, dos secciones planas adyacentes, distantes una longitud dx sobre una viga inicialmente recta, giran un ángulo $d\theta$ una respecto a la otra. Se puede ver con más detalle en la parte CD ampliada de la figura 6-8b. El arco ds medido a lo largo de la elástica entre las dos secciones es igual $\rho d\theta$, siendo ρ el radio de curvatura de la elástica en ese punto. De la ecuación (5-1) se tiene

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

y como $ds = \rho d\theta$, ahora escribimos

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{d\theta}{ds}$$

o bien

$$d\theta = \frac{M}{EI} ds \quad (a)$$

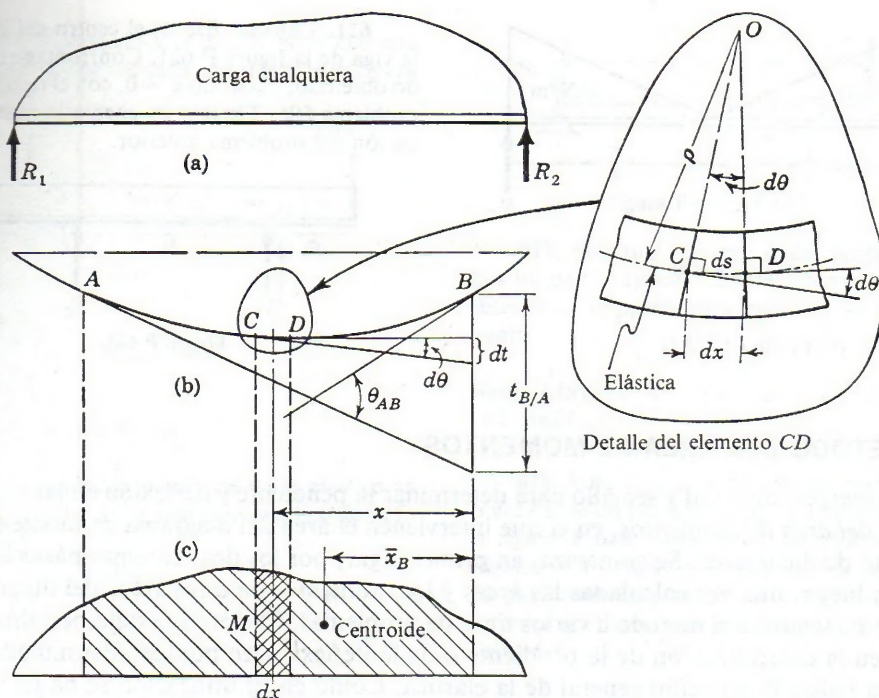


Figura 6-8. Teoremas del área del diagrama de momentos.

En la mayoría de los casos prácticos, la elástica es tan llana que no se comete error apreciable suponiendo que ds es igual a su proyección dx . En estas condiciones, se tiene:

$$d\theta = \frac{M}{EI} dx \quad (b)$$

Evidentemente, dos tangentes trazadas a la elástica en C y D , como en la figura 6-8b, forman el mismo ángulo $d\theta$ que el que forman las secciones OC y OD , por lo que la *desviación angular*, o ángulo entre las tangentes a la elástica en dos puntos cualesquiera A y B , es igual a la suma de estos pequeños ángulos:

$$\theta_{AB} = \int_{\theta_A}^{\theta_B} d\theta = \frac{1}{EI} \int_{x_A}^{x_B} M dx \quad (c)$$

Obsérvese también, figura 6-8b, que la distancia desde el punto B de la elástica, medida perpendicularmente a la posición inicial de la viga, hasta la tangente trazada a la curva por otro punto cualquiera A , es la suma de los segmentos dt interceptados por las tangentes sucesivas trazadas a la elástica en puntos sucesivos. Cada uno de estos segmentos dt puede considerarse como un arco de radio x y ángulo $d\theta$:

$$dt = x d\theta$$

de donde

$$t_{B/A} = \int dt = \int x d\theta$$

Sustituyendo $d\theta$ por su valor en la ecuación (b) se obtiene:

$$t_{B/A} = \frac{1}{EI} \int_{x_A}^{x_B} x(M dx) \quad (d)$$

La longitud $t_{B/A}$ se llama desviación de B con respecto a una tangente trazada por A , o bien, *desviación tangencial* de B respecto de A . El subíndice indica que va desde B hasta la tangente trazada en A . La figura 6-9 aclara la diferencia que existe entre la desviación tangencial $t_{B/A}$ de B respecto de A y la desviación $t_{A/B}$ de A con respecto a B . En general, dichas desviaciones son distintas.

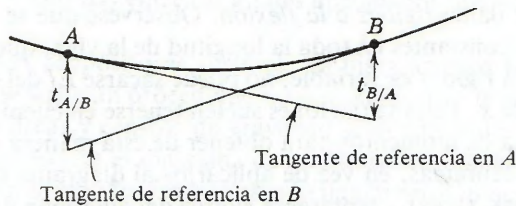


Figura 6-9. En general, $t_{A/B}$ no es igual a $t_{B/A}$.

El significado geométrico de las ecuaciones (c) y (d) conduce a los dos teoremas fundamentales del método del área de momentos. En el diagrama de momentos flexionantes de la figura 6-8c, se observa que $M dx$ es el área del elemento diferencial rayado situado a distancia x de la ordenada que pasa por B . Ahora bien, como $\int M dx$ es la suma de tales elementos, la ecuación (c) se puede escribir en la forma

$$\theta_{AB} = \frac{1}{EI} (\text{área})_{AB} \quad (6-4)$$

Esta es la expresión algebraica del Teorema I, que se puede enunciar como sigue:

Teorema I: La desviación angular, o ángulo entre las tangentes trazadas a la elástica en dos puntos cualesquiera A y B , es igual al producto de $1/EI$ por el área del diagrama de momentos flexionantes entre estos dos puntos.

La figura 6-8c muestra cómo la expresión $x(M dx)$ que aparece dentro de la integral en la ecuación (d) es el momento del área del elemento rayado con respecto a la ordenada en B . Por tanto, el significado geométrico de la integral $\int x(M dx)$ es el momento con respecto a la ordenada en B del área de la porción del diagrama de momentos flexionantes comprendida entre A y B . Con ello la expresión algebraica del Teorema II es:

$$t_{B/A} = \frac{1}{EI} (\text{área})_{BA} \cdot \bar{x}_B \quad (6-5)$$

Este teorema se enuncia así:

Teorema II: La desviación tangencial de un punto B con respecto a la tangente trazada a la elástica en otro punto cualquiera A , en dirección perpendicular a la inicial de la viga, es

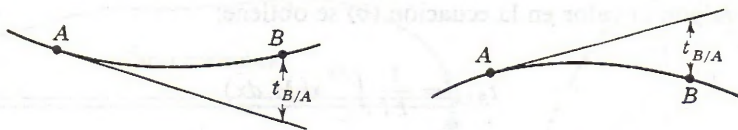


Figura 6-10. Signo de las desviaciones tangenciales. (a) Positiva; B queda situado sobre la tangente de referencia. (b) Negativa; B queda situado por debajo de la tangente de referencia.

igual al producto de $1/EI$ por el momento con respecto a B del área de la porción del diagrama de momentos entre los puntos A y B .

El producto EI se llama *rigidez a la flexión*. Obsérvese que se ha supuesto tácitamente que E e I permanecían constantes en toda la longitud de la viga, que es un caso muy común. Sin embargo, cuando la rigidez es variable, no puede sacarse EI del signo integral, y hay que conocerla en función de x . Tales variaciones suelen tenerse en cuenta dividiendo entre EI las ordenadas del diagrama de momentos para obtener de esta manera un diagrama de M/EI al que se aplican los dos teoremas, en vez de aplicarlos al diagrama de M .

En los dos teoremas, $(\text{área})_{AB}$ representa el área del diagrama de momentos entre las ordenadas correspondientes a los puntos A y B , $\bar{x}_B$ es el brazo de momento de esta área con respecto a B . Cuando el área del diagrama de momentos se compone de varias partes (véase la Sec. 6-4), positivas y negativas, la expresión $(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_B$ representa el momento del área de todas estas partes. El momento del área se toma siempre con respecto a la ordenada del punto cuya desviación se quiere obtener, por lo que conviene ponerle a $\bar{x}$ el subíndice correspondiente, por ejemplo B , lo que indica que el brazo de momentos se toma hasta este punto. Obsérvese que este subíndice B es el mismo del numerador del subíndice de t , B/A .

Los convenios de signos siguientes son de gran importancia: La desviación tangencial de un punto cualquiera es positiva si el punto queda por encima de la tangente con respecto a la cual se toma esta desviación, y negativa si queda por debajo de dicha tangente. En la figura 6-10 se representan las desviaciones positivas y negativas. Recíprocamente, una desviación positiva indica que el punto queda por encima de la tangente de referencia.*

El otro convencionalismo de signos es el que se refiere a las pendientes y se indica en la figura 6-11. Un valor positivo de la *variación de pendiente* θ_{AB} indica que la tangente en el

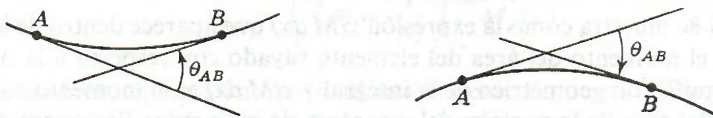


Figura 6-11. Signo de la variación de pendiente o desviación angular. (a) Positiva; θ_{AB} en sentido contrario al del reloj respecto de la tangente de la izquierda. (b) Negativa; θ_{AB} en sentido del reloj respecto de la tangente de la izquierda.

* N. de T. Las áreas de momentos se toman con su signo, el mismo que el momento flexionante, y los brazos de momentos son siempre positivos. Así en la viga de la figura 6-9, que en el tramo AB tiene momentos positivos, $t_{A/B}$ y $t_{B/A}$ son ambas positivas.

punto situado a la derecha, B , se obtiene girando en sentido contrario al del reloj la tangente trazada en el punto más a la izquierda, A ; es decir, que para pasar de la tangente en A a la tangente en B se gira en sentido contrario al del reloj, y viceversa para los valores negativos de θ_{AB} .

6-4. DIAGRAMAS DE MOMENTOS POR PARTES

Para aplicar los teoremas del área de momentos se ha de poder calcular fácilmente, y con precisión, el área de cualquier parte de un diagrama de momentos, y el momento de dicha área con respecto a un eje cualquiera. Un procedimiento es, evidentemente, integrar las expresiones $\int M dx$ y $\int x(M dx)$ entre los límites apropiados, debiendo estar expresado M en función de x .

Sin embargo, nuestro propósito es sustituir las integraciones por cálculos numéricos muy sencillos. Para ello se sigue un procedimiento que consiste en dividir el diagrama de momentos en partes, cuyas áreas y centros de gravedad sean conocidos. Empezaremos, pues, por ver cómo se puede representar el diagrama de momentos flexionantes de forma que se vea el efecto de cada carga por separado. En adelante lo llamaremos *diagrama de momentos por partes*, en lugar del diagrama que pudiera llamarse *normal* o *convencional*.

Su construcción se basa en los dos principios fundamentales:

1. El momento flexionante producido en una determinada sección por un sistema de cargas es igual a la suma de los momentos flexionantes producidos en la misma sección por cada carga actuando por separado. Este principio se expresa algebraicamente mediante la ecuación:

$$M = (\Sigma M)_{izq} = (\Sigma M)_{der} \quad (4-2)$$

en donde $(\Sigma M)_{izq}$ representa la suma de los momentos producidos por todas las fuerzas que actúan a la izquierda de la sección, y $(\Sigma M)_{der}$ la suma de los momentos de todas las fuerzas que actúan a la derecha de la misma.

2. El efecto en el momento flexionante de cualquier carga individual es de la forma general:

$$y = kx^n \quad (a)$$

La figura 6-12 representa esta ecuación. El área y la posición del centro de gravedad se calculan fácilmente mediante las expresiones:

$$\text{área} = \frac{1}{n+1} \cdot bh \quad (b)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n+2} \cdot b \quad (c)$$

siendo b la base y h la altura.

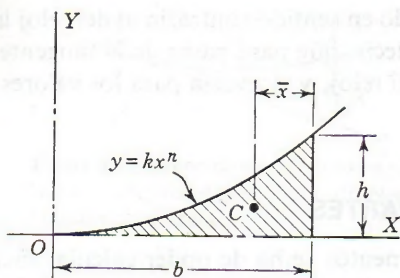


Figura 6-12.

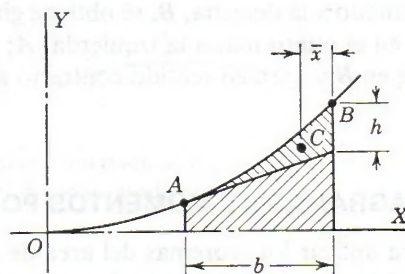


Figura 6-13.

Para calcular el área comprendida entre dos ordenadas cualesquiera A y B , figura 6-13, las ecuaciones (b) y (c) dan los valores correspondientes al área comprendida entre la curva, la tangente en A y la ordenada en B . A esta área habrá que añadir, por supuesto, el área trapecial entre la tangente en A y el eje X .

En la tabla 6-1 se comprueba este segundo principio. Aparecen una serie de datos correspondientes a ménsulas cargadas con tipos de carga cada vez más complejos.

Se observa, por ejemplo, que una ménsula que soporta un par C en el extremo tiene una distribución de momentos flexionantes del tipo $y = kx^n$ donde $k = -C$ y $n = 0$, es decir, $M = -Cx^0$. En otras palabras, un par da lugar a una distribución de momentos de grado cero. Análogamente, una carga concentrada da lugar a una distribución de momentos de grado uno; una carga uniforme, a una de momentos de grado dos, etc.

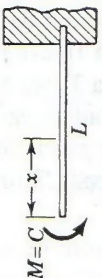
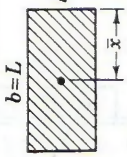
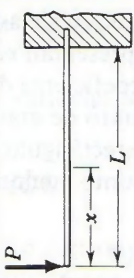
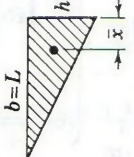
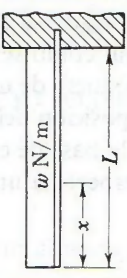
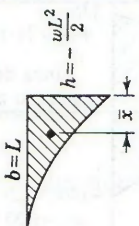
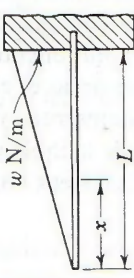
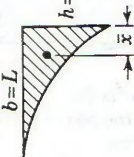
En la columna encabezada con ÁREA se expresa el área del diagrama de momento en función de la base b y la máxima altura h del diagrama, con un coeficiente para cada tipo de carga. La posición del centro de gravedad de cada diagrama de momentos, medida desde el punto de ordenada máxima, viene dada por la longitud de la base por un coeficiente. Estos coeficientes, cuyo cálculo es muy sencillo, se obtienen de las ecuaciones (b) y (c), dando a n el valor del grado de cada ecuación, es decir, $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, etc.

Un ejemplo aclarará la forma de utilizar la Tabla 6-1 para trazar el diagrama de momentos por partes. La viga simplemente apoyada de la figura 6-14 tiene 3 m de longitud y soporta una carga uniformemente distribuida de 300 N/m sobre una longitud de 2 m a partir del apoyo derecho.

En cualquier sección $a-a$ entre A y B , el momento definido por $M = (\Sigma M)_{izq}$ se debe únicamente a R_1 . En cualquier sección $b-b$ entre B y C el momento se debe a R_1 y a la parte de carga uniformemente distribuida entre B y $b-b$. Obsérvese que la carga uniformemente distribuida no interviene en el momento flexionante entre A y B . En realidad, el efecto de R_1 en el momento flexionante en cualquier sección de la viga equivale al que tendría en la ménsula (a), mientras que el efecto de la carga uniforme en cualquier sección equivale al que tendría en la ménsula (b).

Tomando los datos necesarios de la Tabla 6-1 se pueden poner los diagramas de momentos flexionantes de las vigas (a) y (b) sobre una base común, línea de momento cero, como se indica en (c) de la misma figura. Evidentemente, la suma algebraica de las áreas sombreadas de (c) dan como resultado el diagrama de momentos convencional ya que el momento en cualquier sección de la viga original es igual a la suma de los momentos que producen en la misma sección las cargas individuales, principio básico 1. Por tanto, si el área triangular se

TABLA 6-1 Cargas en vigas en voladizo ó ménsulas

TIPO DE CARGA	VOLADIZO CARGADO	DISTRIBUCIÓN (momento en una sección x)	GRADO DE LA ECUACIÓN DE MOMENTO	DIAGRAMA DE MOMENTOS	ÁREA	$\bar{x}$
Par		$M = -C$	Cero (o sea, $M = -Cx^0$)		$\frac{1}{1}bh$	$\frac{1}{2}b$
Concentrada		$M = -Px$	1°		$\frac{1}{2}bh$	$\frac{1}{3}b$
Uniformemente distribuida		$M = -\frac{w}{2}x^2$	2°		$\frac{1}{3}bh$	$\frac{1}{4}b$
Uniformemente variada		$M = -\frac{w}{6L}x^3$	3°		$\frac{1}{4}bh$	$\frac{1}{5}b$

dibuja hacia abajo, resulta el diagrama (d). El área rayada de este diagrama (d) es igual al área del diagrama (e), ya que la única diferencia, en cuanto al aspecto, es que en este último las ordenadas de los momentos se han tomado a partir de la línea horizontal. De aquí se deduce que, recíprocamente, el diagrama de momentos convencional se puede sustituir por el de partes de la figura 6-14c, en el que las áreas y los centros de gravedad de cada parte son fácilmente calculables mediante los datos de la Tabla 6-1.

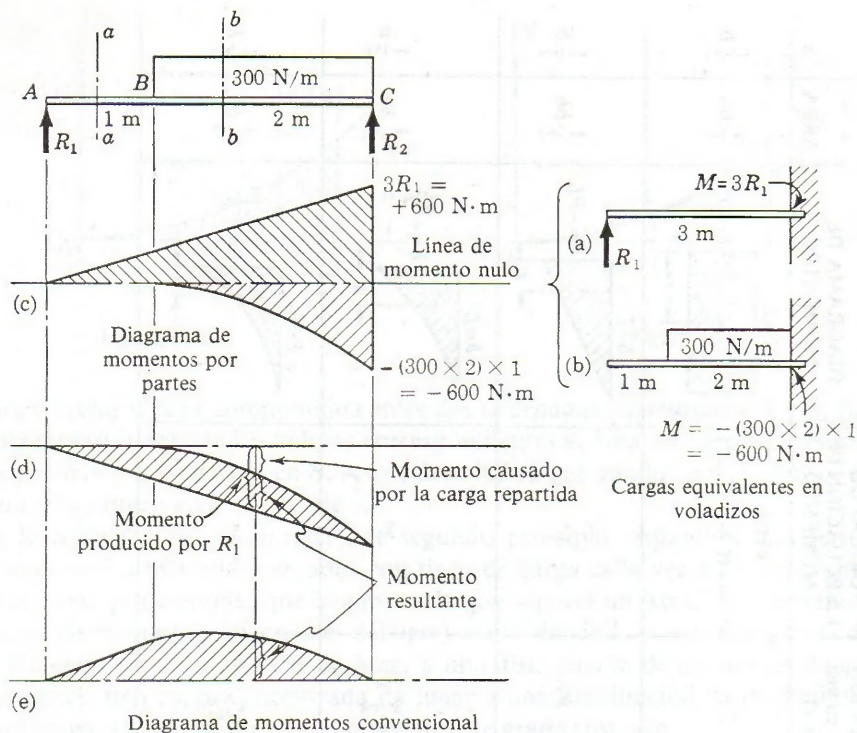


Figura 6-14. Diagramas de momentos por partes.

Para calcular el momento del área del diagrama de momentos, obsérvese que el momento del área del diagrama convencional, figura 6-14e, equivale a la suma de los momentos de las áreas de sus partes componentes, tal como se representan en la figura 6-14c. Por tanto, como cada una de dichas áreas es el producto de un coeficiente de la Tabla 6-1 por las dimensiones del rectángulo circunscrito, y la posición del centro de gravedad de cada parte viene dada por otro coeficiente de la tabla por la base de este rectángulo, se puede obtener muy fácilmente el momento de las áreas con respecto a un punto cualquiera, C por ejemplo, con lo que resulta

$$[(\text{área})_{AC} \cdot \bar{x}_C = \Sigma ax]$$

$$(\text{área})_{AC} \cdot \bar{x}_C = \left(\frac{3 \times 600}{2} \right) \left(\frac{1}{3} \times 3 \right) - \left(\frac{2 \times 600}{3} \right) \left(\frac{1}{4} \times 2 \right)$$

$$= 700 \text{ N}\cdot\text{m}^3$$

Resp.

La notación $\bar{x}_C$ indica que el brazo de momento ha sido medido desde C . Por el Teorema II del método del área de momentos, este resultado mide el producto $EIt_{C/A}$, siendo $t_{C/A}$ la desviación de C con respecto a la tangente trazada por A a la elástica.

Una última observación. Con frecuencia no es necesario calcular las reacciones del viga. En el ejemplo propuesto, y puesto que el momento flexionante en C ha de ser nulo, el mo-

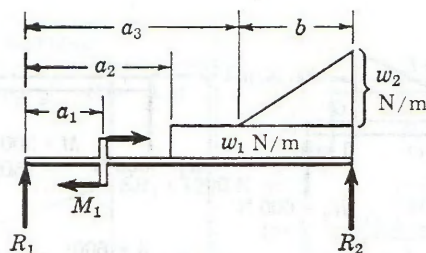


Figura 6-15.

mento de la reacción R_1 en C , igual a $3R_1$, tiene que equilibrar al momento de $-600 \text{ N} \cdot \text{m}$ producido por las cargas.

Se observará cómo la técnica de la representación del diagrama de momentos por partes es realmente una interpretación gráfica del procedimiento que se ha estudiado en la sección 6-2 para expresar la distribución general de momentos en toda la viga mediante una sola ecuación. En efecto, según aquel método, para la viga de la figura 6-15 la ecuación general de momentos es

$$M = R_1 x + M_1 \langle x - a_1 \rangle^0 - \frac{w_1}{2} \langle x - a_2 \rangle^2 - \frac{w_2}{6b} \langle x - a_3 \rangle^3$$

Si cada término dentro de los paréntesis angulares se sustituye por una nueva variable que tenga su origen en el punto donde empieza la carga, se deduce que cada sumando de la ecuación general de momentos es la distribución de momentos en una viga en ménsula de alguno de los tipos de la Tabla 6-1. Así, pues, sustituyendo $\langle x - a_1 \rangle$ por u , $\langle x - a_2 \rangle$ por v y $\langle x - a_3 \rangle$ por z , resulta

$$M = R_1 x + M_1 u^0 - \frac{w_1}{2} v^2 - \frac{w_2}{6b} z^3$$

en donde, naturalmente, las variables u , v y z no pueden tener signo negativo.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

622. Calcular el momento con respecto al apoyo izquierdo del área de momentos flexionantes de la viga de la figura 6-16a.

Solución: Las reacciones, calculadas por las ecuaciones del equilibrio estático, son $R_1 = 300 \text{ N}$ y $R_2 = 600 \text{ N}$. El diagrama de momentos por partes se determina aplicando $M = (\Sigma M)_{\text{izq}}$ a los tramos AB y BC , y $M = (\Sigma M)_{\text{der}}$ al tramo CD , ya que en este caso resulta más sencillo hacerlo así que haciéndolo en todos los tramos por las fuerzas de la izquierda. En general, pues, los momentos flexionantes se determinan por el lado que sea más cómodo.

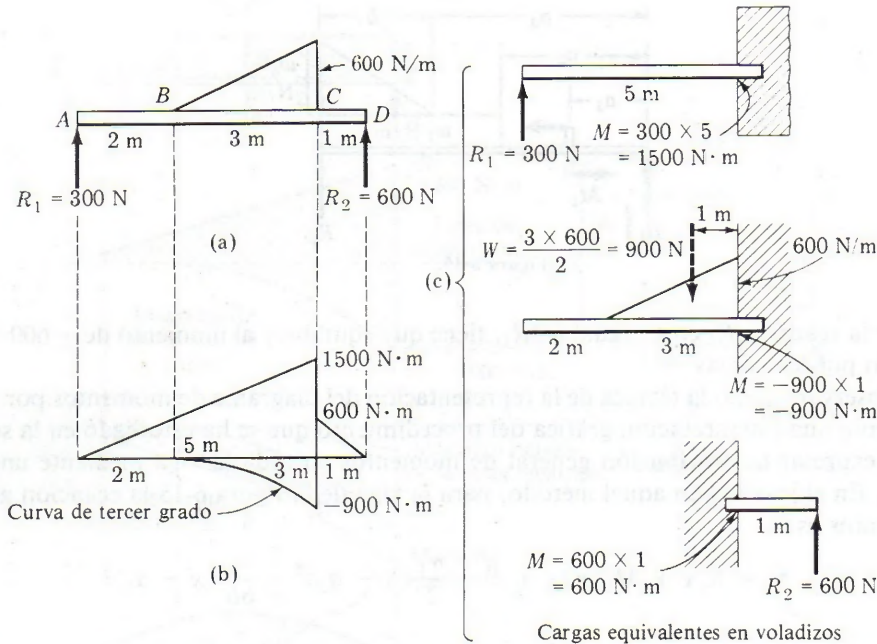


Figura 6-16.

En la figura 6-16c se indican las ménsulas equivalentes. El diagrama de momentos por partes se representa en la figura 6-16b. Conviene comprobar que el momento en C es el mismo considerando las fuerzas de la derecha o las de la izquierda.

El momento del área del diagrama de M respecto del extremo izquierdo A se calcula como la suma de los momentos de las áreas de sus partes componentes. Tomando los coeficientes correspondientes de la Tabla 6-1, para el área y para la posición del centro de gravedad, resulta:

$$\begin{aligned}
 [(\text{área})_{AD} \cdot \bar{x}_A] &= \sum ax \\
 (\text{área})_{AD} \cdot \bar{x}_A &= \left(\frac{1500 \times 5}{2} \right) \left(\frac{2}{3} \times 5 \right) + \left(\frac{600 \times 1}{2} \right) \left(5 + \frac{1}{3} \times 1 \right) \\
 &\quad - \left(\frac{900 \times 3}{4} \right) \left(2 + \frac{4}{5} \times 3 \right) \\
 &= 11.13 \text{ kN} \cdot \text{m}^3
 \end{aligned}$$

Resp.

Esta solución representa un valor de EIt . ¿Cuál es?

623. Calcular el momento con respecto a C del área del diagrama de momentos comprendida entre los apoyos en la viga con voladizo de la figura 6-17a.

Solución: En cualquier sección entre A y C el momento flexionante convencional se calcula más fácilmente mediante las fuerzas a la izquierda de la sección, mientras que entre C y D es más sencillo el cálculo mediante las fuerzas de la derecha. El diagrama de momentos por partes de la figura 6-17b se ha trazado combinando los de las ménsulas de la figura 6-17c.

En este problema no es preciso calcular el valor de las reacciones. El momento producido por R_1 en C se halla teniendo en cuenta que debe ser el mismo considerando las fuerzas a

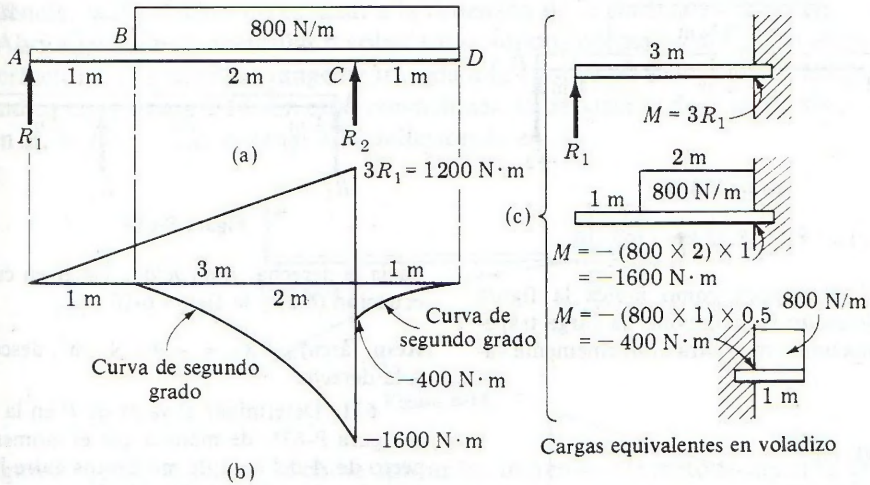


Figura 6-17.

la izquierda que las fuerzas a la derecha. En otras palabras, $3R_1 - 1600 = -400$, de donde $3R_1 = 1200 \text{ N}\cdot\text{m}$.

Para obtener el momento del área del diagrama de M entre A y C con respecto a C, se tiene:

$$[(\text{área})_{AC} \cdot \bar{x}_C = \Sigma ax]$$

$$(\text{área})_{AC} \cdot \bar{x}_C = \left(\frac{3 \times 1200}{2} \right) \left(\frac{3}{3} \right) - \left(\frac{2 \times 1600}{3} \right) \left(\frac{2}{4} \right) = 1270 \text{ N}\cdot\text{m}^3$$

PROBLEMAS

Calcular en cada una de las vigas de los problemas 624 a 629 el momento del área del diagrama de momentos flexionantes comprendida entre los apoyos respecto de cada uno de éstos.

624. Viga cargada como indica la figura P-624.

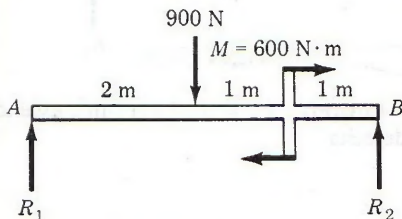


Figura 6-24.

Resp. $(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A = 2500 \text{ N}\cdot\text{m}^3$

625. Viga cargada como indica la figura P-625. Indicación: Trazar el diagrama de momentos por partes, de derecha a izquierda.

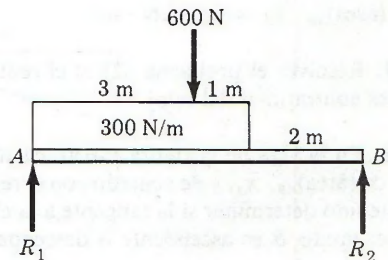


Figura 6-25.

626. Viga cargada como indica la figura P-626.

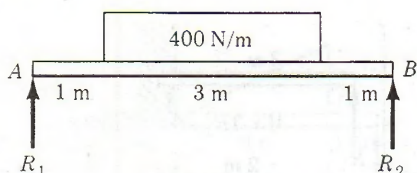


Figura P-626.

Resp. $(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_B = 8.25 \text{ kN} \cdot \text{m}^3$

627. Viga cargada como indica la figura P-627. *Indicación:* Descomponer la carga trapezoidal en una uniforme y otra uniformemente variada.

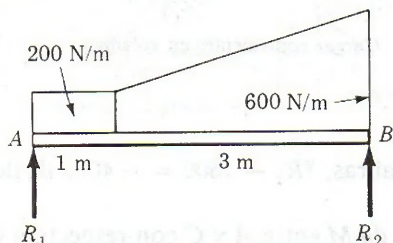


Figura P-627.

628. Viga cargada con una carga uniformemente variada y un par, como indica la figura P-628.

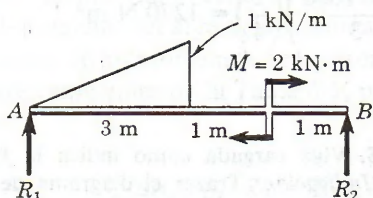


Figura P-628 y P-629.

Resp. $(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A = 2.13 \text{ kN} \cdot \text{m}^3$

629. Resolver el problema 628 si el sentido del par es contrario al del reloj.

630. En la viga de la figura P-630, calcular el valor de $(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A$, y de acuerdo con el resultado obtenido determinar si la tangente a la elástica en el punto B es ascendente o descendente

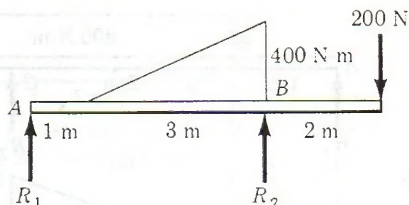


Figura P-630.

hacia la derecha. *Indicación:* Tener en cuenta la ecuación (6-5) y la figura 6-10.

Resp. $(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A = -463 \text{ N} \cdot \text{m}^3$; descendente a la derecha

631. Determinar el valor de P en la viga de la figura P-631, de manera que el momento respecto de A del área de momentos entre los apoyos sea nulo. ¿Qué significado físico tiene este resultado?

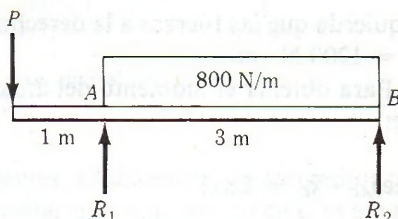


Figura P-631.

632. En la viga de la figura P-632, calcular el valor de $(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A$. De acuerdo con el resultado obtenido, determinar si la tangente a la elástica en el punto B se dirige hacia arriba o hacia abajo, de izquierda a derecha. *Indicación:* Tener en cuenta la ecuación (6-5) y la figura 6-10.

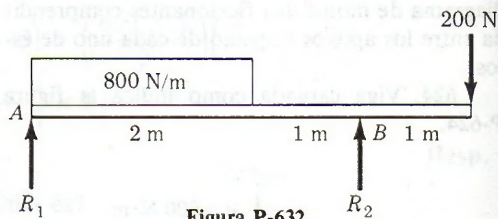


Figura P-632.

Resp. $(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A = 1.27 \text{ kN} \cdot \text{m}^3$; ascendente a la derecha

6.5. DEFORMACIÓN DE VIGAS EN VOLADIZO

Como ya se dijo, la desviación tangencial de un punto cualquiera es la distancia desde ese punto de la elástica a la tangente trazada a la curva en otro punto (Sec. 6-3, Fig. 6-8). En

consecuencia, la desviación no es igual a la ordenada de la elástica en la generalidad de los casos. Ahora bien, en las ménsulas o voladizos se supone normalmente que el empotramiento es perfecto y, por tanto, la tangente trazada a la elástica en este punto es horizontal, como se indica en la figura 6-18. En estas condiciones, la desviación de A con respecto a la tangente en B , es decir, $t_{A/B}$, es igual a la deflexión δ_A en A .



Figura 6-18.

Algunos ejemplos aclararán cómo aplicar los teoremas del método del área de momentos para determinar la pendiente y la deflexión en tales tipos de vigas. Después se considera su aplicación a las vigas simplemente apoyadas, sin voladizos o con ellos.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

633. La viga en ménsula de la figura 6-19 tiene un módulo elástico $E = 12 \text{ GN/m}^2$, $I = 10 \times 10^6 \text{ mm}^4$. Hallar el valor de P tal que la deflexión en el extremo libre sea de 20 mm.

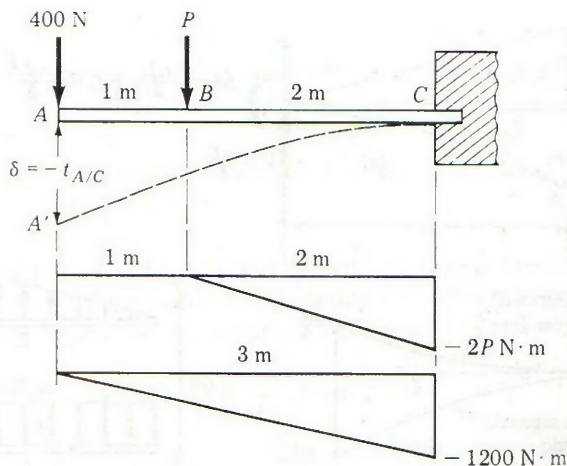


Figura 6-19.

Solución: Se traza, como indica la figura, el diagrama de momentos por partes. La deflexión δ en A es numéricamente igual a la desviación de A con respecto a la tangente en C , ya

que esta desviación es negativa, pues A queda bajo la tangente en C . Por el Teorema II se tiene

$$t_{A/C} = \frac{1}{EI} (\text{área})_{AC} \cdot \bar{x}_A$$

$$-\delta = \frac{1}{EI} \left[- \left(\frac{2 \times 2P}{2} \right) \left(1 + \frac{2}{3} \times 2 \right) - \left(\frac{3 \times 1200}{2} \right) \left(\frac{2}{3} \times 3 \right) \right]$$

de donde

$$EI\delta = (4.667P + 3600) \text{ N} \cdot \text{m}^3$$

Como $EI\delta$ se expresa en $\text{N} \cdot \text{m}^3$, I debe estar en m^4 y δ en m . Sustituyendo, pues, los valores dados de E , I y δ resulta

$$(12 \times 10^9)(10 \times 10^{-6})(20 \times 10^{-3}) = 4.667P + 3600$$

de donde,

$$P = -257 \text{ N}$$

Resp.

El valor negativo de P indica que su sentido es hacia arriba y no hacia abajo como se había supuesto.

634. Calcular la pendiente y la deflexión máxima en la viga en voladizo de la figura 6-20a que soporta una carga uniformemente variable desde cero en el empotramiento hasta $w \text{ N/m}$ en el extremo libre.

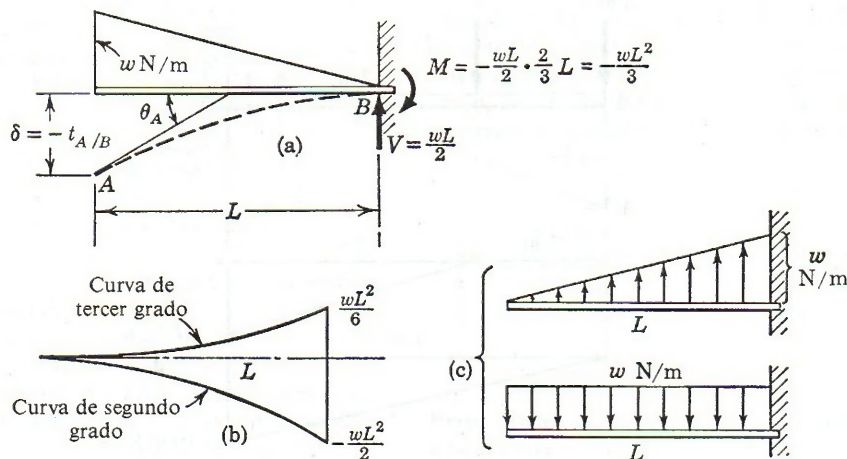


Figura 6-20.

Solución: Aunque la carga dada no responde a ninguno de los tipos de la Tabla 6-1 se puede transformar fácilmente en suma de dos de ellos. Para ello se sustituye por las cargas que indi-

ca la figura 6-20a por las que muestra la figura 6-20c, es decir, superponiendo una carga hacia abajo uniformemente repartida, y una hacia arriba uniformemente variada. En estas condiciones resulta el diagrama de momentos por partes que muestra la figura 6-20b.

De la curva elástica de la figura 6-20a se deduce que la pendiente y la deflexión máximas tienen lugar en el extremo libre A . El ángulo θ_A es igual a la variación de la pendiente entre las tangentes a la elástica en los puntos A y B . Por el Teorema I se tiene:

$$\theta_A = \theta_{AB} = \frac{1}{EI} (\text{área})_{AB} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{wL^2}{6} \cdot L - \frac{1}{3} \cdot \frac{wL^2}{2} \cdot L \right] = -\frac{wL^3}{8EI}$$

De acuerdo con la figura 6-11, el signo menos indica que el ángulo se mide en sentido del reloj al pasar de la tangente en A a la tangente en B , por lo que la tangente en A es ascendente hacia la derecha, como se puede observar.

La deflexión máxima δ en A , es numéricamente igual a $t_{A/B}$, esto es, la desviación de A con respecto a la tangente en B . Esta desviación, como en el problema anterior, es negativa, ya que A queda por debajo de la tangente en B . Aplicando el Teorema II se tiene:

$$\begin{aligned} \left[t_{A/B} = \frac{1}{EI} (\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A \right] \\ - \delta = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{wL^2}{6} \cdot L \right) \left(\frac{4}{5} L \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{wL^2}{2} \cdot L \right) \left(\frac{3}{4} L \right) \right] \end{aligned}$$

Simplificando,

$$\delta = \frac{11}{120} \frac{wL^4}{EI}$$

Resp.

Recordemos que la notación $\bar{x}_A$ indica que el brazo de momentos de las áreas se mide desde A .

635. Para el voladizo cargado, como indica la figura 6-21a, calcular el valor de $EI\delta$ en A y en B .

Solución: Las deflexiones en A y B son numéricamente iguales a las desviaciones de A y B respecto de la tangente en C . Puesto que A y B quedan por debajo de la tangente, tales desviaciones, $t_{A/C}$ y $t_{B/C}$, son negativas. Aplicando el Teorema II se tiene:

$$- \delta_A = t_{A/C} = \frac{1}{EI} (\text{área})_{AC} \cdot \bar{x}_A \quad (a)$$

y

$$- \delta_B = t_{B/C} = \frac{1}{EI} (\text{área})_{BC} \cdot \bar{x}_B \quad (b)$$

Obsérvese que en la ecuación (a) se utiliza el diagrama de momentos total entre A y C , mientras que en (b) solamente la parte del diagrama entre B y C . Veamos primero distintas

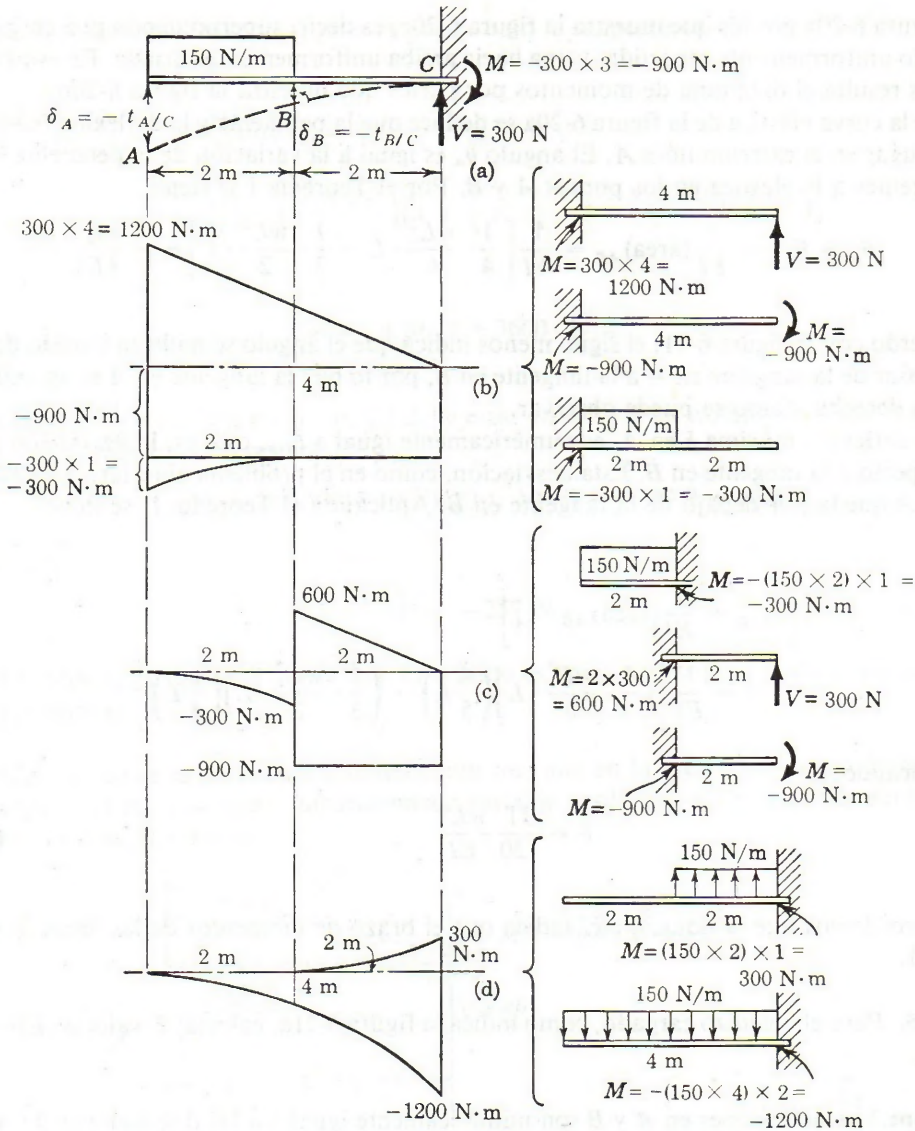


Figura 6-21. Distintas formas de un mismo diagrama de momentos por partes.

formas de determinar el diagrama de momentos por partes para luego emplear la más sencilla.

1.º El diagrama de momentos de la figura 6-21b se ha expresado en función de las fuerzas a la derecha, de acuerdo con $M = (\Sigma M)_{\text{der}}$. Las vigas en voladizo equivalentes son las indicadas.

2.º Otra forma de expresar los momentos entre A y B en función de las fuerzas a la izquierda, y los momentos entre B y C en función de las fuerzas a la derecha. La figura 6-21c representa el diagrama de momentos por partes y las vigas en voladizo equivalentes.

3.º Otro procedimiento consiste en sustituir las cargas dadas por las indicadas en la figura 6-21d. Este método da el diagrama de momentos más sencillo.

Aunque se obtendría el mismo resultado utilizando uno cualquiera de los tres diagramas, vamos a aplicar la ecuación (a) a este último, figura 6-21d. Recordando que $\bar{x}_A$ indica que se toman momentos respecto de A se tiene

$$-\delta_A = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{2 \times 300}{3} \right) \left(2 + \frac{3}{4} \times 2 \right) - \left(\frac{4 \times 1200}{3} \right) \left(\frac{3}{4} \times 4 \right) \right]$$

que se reduce a

$$EI\delta_A = 4100 \text{ N}\cdot\text{m}^3$$

Resp.

Puesto que la flecha en B viene expresada en función del (área) $_{BC}$ se puede emplear cualquiera de los diagramas (b) o (c) de la figura 6-21, ya que son iguales y además más sencillos que el caso (d) para este tramo BC . Tomando momentos respecto de B , como indica $\bar{x}_B$, de la ecuación (b) se obtiene

$$-\delta_B = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{2 \times 600}{2} \right) \left(\frac{1}{3} \times 2 \right) - (2 \times 900) \left(\frac{1}{2} \times 2 \right) \right]$$

de donde se deduce

$$-EI\delta_B = 400 - 1800 \quad \text{o bien, } EI\delta_B = 1400 \text{ N}\cdot\text{m}^3$$

Resp.

Aunque no se indica en la figura 6-21, todavía hay un cuarto procedimiento para trazar el diagrama de momentos por partes, aplicando un concepto expuesto en la sección 4-3. Una viga puede cortarse por cualquier sección y sustituir el efecto de las cargas a un lado de ella por la fuerza cortante y el momento flexionante en dicha sección. En B , la carga da lugar a $V = -300 \text{ N}$ y un momento flexionante M de $-300 \text{ N}\cdot\text{m}$, que darían de B a C un diagrama triangular y otro rectangular. El lector puede trazar también estos diagramas y utilizarlos para calcular δ_B , confrontando luego este resultado con el valor obtenido anteriormente.

PROBLEMAS

636. La viga en voladizo de la figura P-636 tiene una sección de 50 mm de ancho y h mm de altura. Determinar h de manera que la deflexión máxima sea de 10 mm y teniendo $E = 10 \times 10^9 \text{ N/m}^2$.

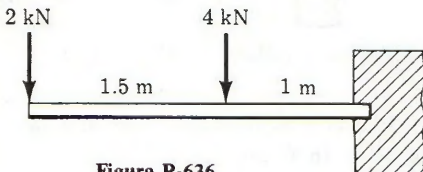


Figura P-636

Resp. $h = 328 \text{ mm}$

una carga repartida hacia abajo. Calcular la deflexión, a 2 m de la pared, si $E = 10 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ e $I = 20 \times 10^6 \text{ mm}^4$.

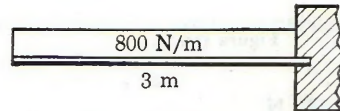


Figura P-637.

Resp. $\delta = 22.7 \text{ mm}$

638. Calcular el valor de $EI\delta$ en el extremo izquierdo de la viga mostrada en la figura P-638. ¿Qué sentido tiene la deflexión?

637. Sobre la viga de la figura P-637 actúa

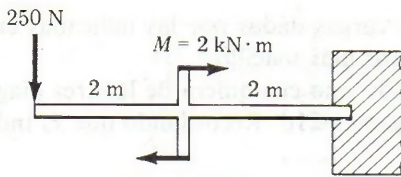


Figura P-638.

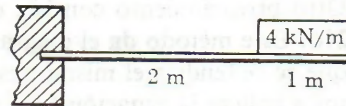


Figura P-642.

643. Hallar el máximo valor de $EI\delta$ en la viga en voladizo de la figura P-643.

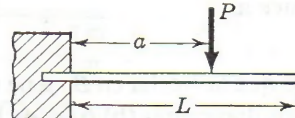


Figura P-643.

Resp. $EI\delta = (Pa^2/6)(3L - a)$

644. Determinar la máxima deflexión para la viga de la figura P-644.

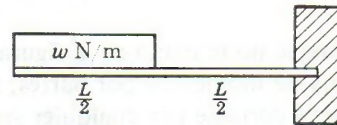


Figura P-644.

645. Calcular la deflexión y la pendiente en un punto a 2 m del empotramiento en la viga cargada como indica la figura P-645. $E = 10 \text{ GN/m}^2$ e $I = 30 \times 10^6 \text{ mm}^4$.

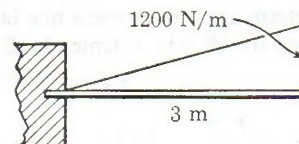


Figura P-645.

Resp. $\delta = 16.4 \text{ mm}$; $\theta = 0.739^\circ$

646. En la viga de la figura P-646, determinar el valor de I , que limite la deflexión máxima a 20 mm; $E = 10 \times 10^9 \text{ N/m}^2$.

Resp. $EI\delta = 6.67 \text{ kN} \cdot \text{m}^3$; hacia arriba

639. En la viga en ménsula de la figura P-639 determinar la deflexión en el extremo libre, dado que $E = 10 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ e $I = 60 \times 10^6 \text{ mm}^4$.

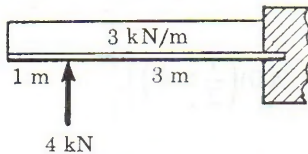


Figura P-639 y P-640.

640. En la viga de la figura P-640 calcular la deflexión en el punto de aplicación de la carga concentrada. ¿Qué sentido tiene?

Resp. $\delta = 46.9 \text{ mm}$; hacia abajo

641. Dada la viga en voladizo, de la figura P-641, ¿qué valor de P producirá una deflexión nula en A?

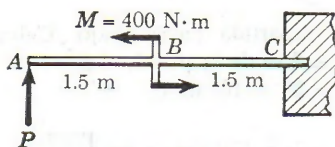


Figura P-641.

Resp. $P = 150 \text{ N}$

642. Determinar la deflexión máxima en la viga de la figura P-642 cargada como se indica si la sección es rectangular, de 50 mm de ancho por 150 mm de altura y $E = 69 \text{ GN/m}^2$.

Resp. $\delta = 28 \text{ mm}$

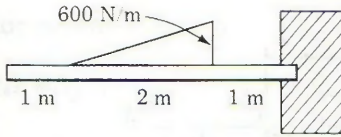


Figura P-646.

647. Determinar el máximo valor de $EI\delta$ en la viga de la figura P-647.

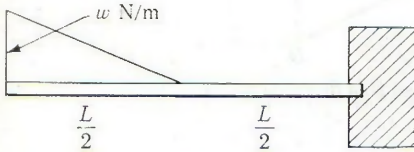


Figura P-647.

648. La viga en voladizo de la figura P-648 soporta una carga uniformemente variable de cero en el extremo libre a w N/m en el empotramiento. Determinar la pendiente y la ordenada en una sección cualquiera a una distancia x del empotramiento.

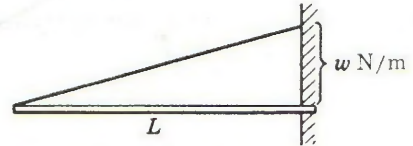


Figura P-648.

Resp. $EI\delta = (wx^2/120L)(10L^3 - 10L^2x + 5Lx^2 - x^3)$

Resp. $EI\delta = (121/1920)wL^4$

6-6. DEFORMACIÓN DE VIGAS SIMPLEMENTE APOYADAS

El cálculo de las deformaciones en las vigas en voladizo se simplifica notablemente debido a que la tangente a la elástica en el empotramiento es horizontal. En las vigas simplemente apoyadas, en general, no se sabe en qué punto la tangente es horizontal y, por tanto, se ha de emplear un método de cálculo diferente. Este método, que a primera vista puede parecer un tanto complicado, es rápido y sencillo. Se representa gráficamente en la figura 6-22, donde se ha trazado la elástica de una viga simplemente apoyada, pero no las cargas ni la ley de momentos.

El problema consiste en la determinación del valor de la deflexión δ en cualquier punto B . Trazando por A la tangente a la elástica, la desviación $t_{B/A}$ del punto B con respecto a esta tangente *no* es evidentemente el valor pedido de δ . Sin embargo, la suma de δ y $t_{B/A}$ es igual a EF , por lo que determinando EF y $t_{B/A}$ se ha resuelto el problema. El valor de EF se calcula estableciendo la semejanza de los triángulos AEF y ACD y, en este último, CD es la desviación $t_{C/A}$ de C con respecto a la tangente en A .

De acuerdo con todo esto e invirtiendo el orden de las operaciones, el procedimiento a seguir es el siguiente:

1. Calcular $t_{C/A}$ mediante la relación $t_{C/A} = (1/EI) (\text{área})_{AC} \cdot \bar{x}_C$.
2. Por la semejanza de triángulos, $EF = x/L \cdot t_{C/A}$.
3. Calcular $t_{B/A}$ por la relación $t_{B/A} = (1/EI) (\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_B$.
4. Puesto que EF es la suma de δ y $t_{B/A}$, el valor de δ es $EF - t_{B/A}$.

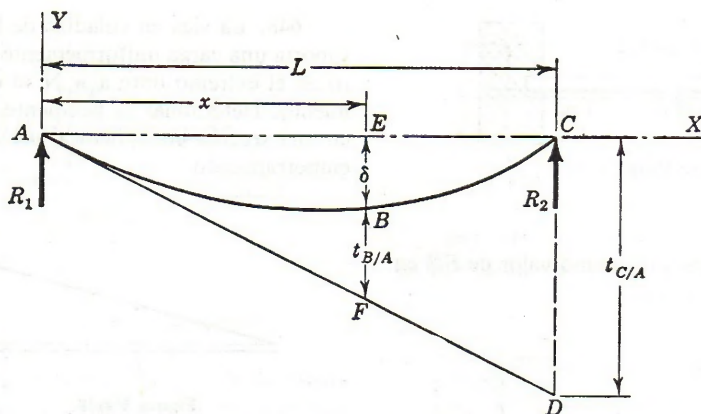


Figura 6-22. Relaciones geométricas en el método del área de momentos aplicado a vigas simplemente apoyadas.

Como se ha dicho, el método puede parecer largo, pero es muy rápido de establecer. Algunos ejemplos aclararán la forma práctica de aplicación del mismo. Consideraremos cargas sencillas para fijar la atención en las ideas fundamentales y no en los cálculos. En el caso de cargas más complicadas, el procedimiento es el mismo, y el diagrama de momentos se hace por partes, de acuerdo con lo indicado en la sección 6-4.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

649. La viga de la figura 6-23 soporta una carga concentrada de 300 N a 2 m del apoyo izquierdo. Calcular el valor de $EI\delta$ en B, a 1 m de este apoyo.

Solución: Se empieza por dibujar la forma aproximada de la elástica, curva punteada, y el diagrama de momentos por partes, de izquierda a derecha. Con el procedimiento indicado se calcula $t_{C/A}$:

$$\left[t_{C/A} = \frac{1}{EI} (\text{área})_{CA} \cdot \bar{x}_C \right]$$

$$t_{C/A} = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{3 \times 300}{2} \right) \left(\frac{1}{3} \times 3 \right) - \left(\frac{1 \times 300}{2} \right) \left(\frac{1}{3} \times 1 \right) \right] = \frac{400}{EI} \quad (a)$$

Por semejanza de los triángulos ABD y ACE:

$$BD = \frac{1}{3} \times t_{C/A} = \frac{400}{3EI} \quad (b)$$

El valor de $t_{B/A}$ es:

$$\left[t_{B/A} = \frac{1}{EI} (\text{área})_{BA} \cdot \bar{x}_B \right] \quad t_{B/A} = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1 \times 100}{2} \right) \left(\frac{1}{3} \times 1 \right) \right] = \frac{100}{6EI} \quad (c)$$

y el valor pedido de δ es:

$$[\delta = BD = t_{B/A}]$$

$$\delta = \frac{1}{EI} \left[\frac{400}{3} - \frac{100}{6} \right]$$

$$EI\delta = 116.7 \text{ N}\cdot\text{m}^3$$

Resp.

650. Calcular la pendiente de la elástica, en el apoyo izquierdo, en la viga del problema anterior, figura 6-23.

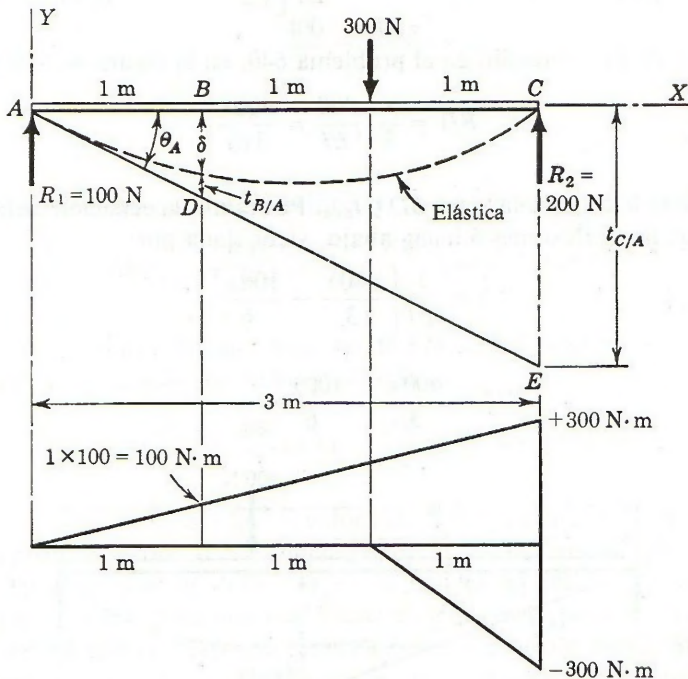


Figura 6-23.

Solución: La pendiente de la elástica en A viene dada por $\tan \theta_A$, siendo θ_A el ángulo entre la horizontal y la tangente en A a la elástica. Como las deflexiones y los ángulos de la elástica son muy pequeños comparados con la longitud de la viga, $\tan \theta_A$ es prácticamente igual a θ_A expresado en radianes. Ahora bien, en la figura 6-23 se tiene:

$$\theta_A \approx \tan \theta_A = \frac{CE}{AC} = \frac{t_{C/A}}{AC}$$

Sustituyendo el valor de $t_{C/A} = 400/EI$, obtenido en el problema anterior,

$$\theta_A = \frac{400/EI}{3} = \frac{400}{3EI}$$

Resp.

651. En la viga del problema 649, determinar la posición y el valor de la deflexión máxima.

Solución: La solución se puede obtener por dos métodos. Ambos deben dominarse perfectamente, ya que conviene aplicar uno u otro según los casos.

Método I. Se comienza calculando la deflexión en un punto cualquiera a distancia x del apoyo izquierdo. Mediante el mismo proceso del problema 649, figura 6-24, se tiene:

$$\left[t_{B/A} = \frac{1}{EI} (\text{área})_{BA} \cdot \bar{x}_B \right] \quad t_{B/A} = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot x \cdot 100x \right) \left(\frac{x}{3} \right) \right] = \frac{100x^3}{6EI}$$

Con el valor de $t_{C/A}$ obtenido en el problema 649, en la figura 6-24 se tiene:

$$\left[BD = \frac{x}{3} \cdot t_{C/A} \right] \quad BD = \frac{x}{3} \cdot \frac{400}{EI} = \frac{400x}{3EI}$$

El valor de δ es la diferencia entre BD y $t_{B/A}$. Por tanto, la ecuación de la elástica, considerando positivas las deflexiones δ hacia abajo, viene dada por:

$$\left[\delta = BD - t_{B/A} \right] \quad \delta = \frac{1}{EI} \left[\frac{400x}{3} - \frac{100x^3}{6} \right]$$

o bien

$$EI\delta = \frac{400x}{3} - \frac{100x^3}{6} \quad (a)$$

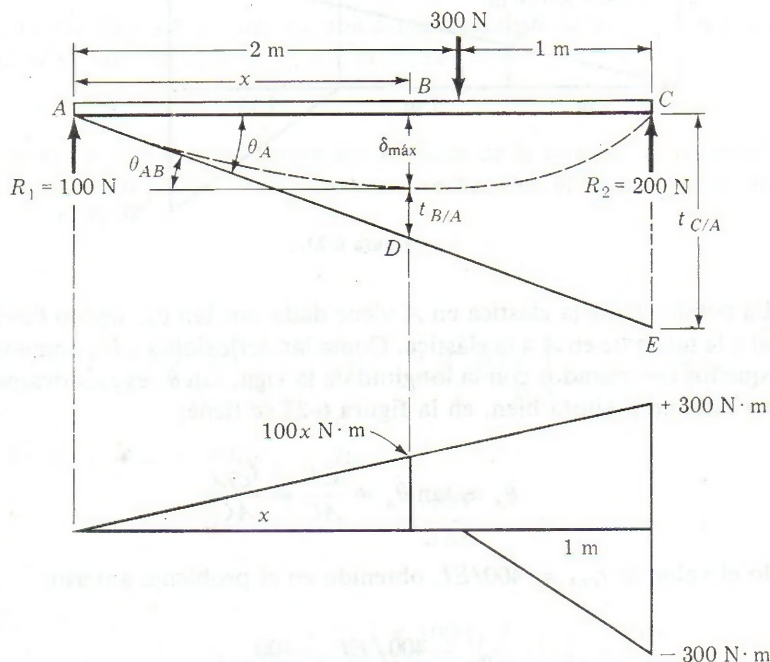


Figura 6-24.

Esta expresión es válida para cualquier punto entre el apoyo izquierdo y la carga, es decir, entre $x = 0$ y $x = 2$ m. La expresión de la pendiente para este tramo de la viga se obtiene derivando la ecuación (a)

$$EI \frac{d\delta}{dx} = \frac{400}{3} - \frac{300x^2}{6} \quad (b)$$

De acuerdo con la teoría de máximos y mínimos, igualando a cero la primera derivada de la expresión (a) se obtiene el punto de máxima deflexión. Esto equivale a anular la expresión (b), lo cual determina el punto de pendiente nula de la viga. En estas condiciones,

$$\frac{400}{3} - \frac{300x^2}{6} = 0$$

o bien,

$$x = 1.63 \text{ m}$$

Resp.

Sustituyendo este valor de x en la expresión (a), resulta el valor de la deflexión máxima:

$$(EI\delta)_{\text{máx}} = \frac{400}{3}(1.63) - \frac{100}{6}(1.63)^3 = 145 \text{ N}\cdot\text{m}^3 \quad \text{Resp.}$$

Es interesante comparar el valor máximo de $EI\delta$ con su valor en el centro del viga. Poniendo $x = 1.50$ m en la ecuación (a), este último es

$$(EI\delta)_{\text{centro}} = \frac{400}{3}(1.5) - \frac{100}{6}(1.5)^3 = 144 \text{ N}\cdot\text{m}^3$$

que es alrededor de un 1% menor que el valor máximo. Esta diferencia es tan pequeña comparada con los posibles errores o variaciones en los datos que, en cualquier aplicación práctica, se puede suponer que la deflexión en el centro equivale a la deflexión máxima verdadera*. Se demuestra, para una viga sometida a la acción de una carga concentrada en un punto cualquiera, que la diferencia máxima entre la deflexión en el centro y la deflexión máxima es solamente de un 2.6%. En la sección siguiente se estudia un método simplificado para calcular la deflexión en el centro de la luz.

Método II. En el punto de deflexión máxima, la tangente a la elástica es horizontal. Como se observa en la figura 6-24, la variación de la pendiente entre las tangentes en los puntos B y A, es decir, θ_{AB} , es igual a la pendiente θ_A en A. (Puesto que prácticamente $\theta_A = \theta_B$.)

Del Teorema I del área de momentos,

$$\left[\theta_{AB} = \frac{1}{EI} (\text{área})_{AB} \right] \quad \theta_{AB} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot x \cdot 100x \right) = \frac{50x^2}{EI}$$

*N. de T. Aclaremos que esta equivalencia es efectiva en las vigas simplemente apoyadas sometidas a cualquier tipo de cargas (fuerzas negativas o hacia abajo). Cuando las fuerzas aplicadas son unas positivas y otras negativas, o son pares, o se trata de una viga con voladizos, la deflexión en el centro no guarda relación alguna con la deflexión máxima. Por ejemplo, en una viga simplemente apoyada con un par en el centro, la deflexión en el centro es nula, y, sin embargo, existen dos deflexiones máximas, una positiva y otra negativa, simétricamente colocadas respecto del centro.

Igualando con $\theta_A = 400/3EI$ del problema 650,

$$\frac{50x^2}{EI} = \frac{400}{3EI}$$

de donde

$$x = 1.63 \text{ m}$$

Resp.

El cálculo de $EI\delta$ en este punto se hace como en el Método I. Resulta $EI\delta = 145 \text{ N} \cdot \text{m}^3$.

652. Determinar el valor de la deflexión en D en la viga de la figura 6-25a.

Solución: En este problema resalta la importancia de la correcta interpretación del signo positivo o negativo de las desviaciones, en particular cuando afecta a relaciones geométricas en la curva elástica. Aunque el problema se puede resolver trazando las tangentes de referencia en A o en C , resultan valores menores en las operaciones intermedias y, por tanto, mayor garantía de no haber cometido errores si se traza la tangente de referencia en C . Antes de hacerlo, calculemos la desviación de A con respecto a esta tangente. El signo de dicha des-

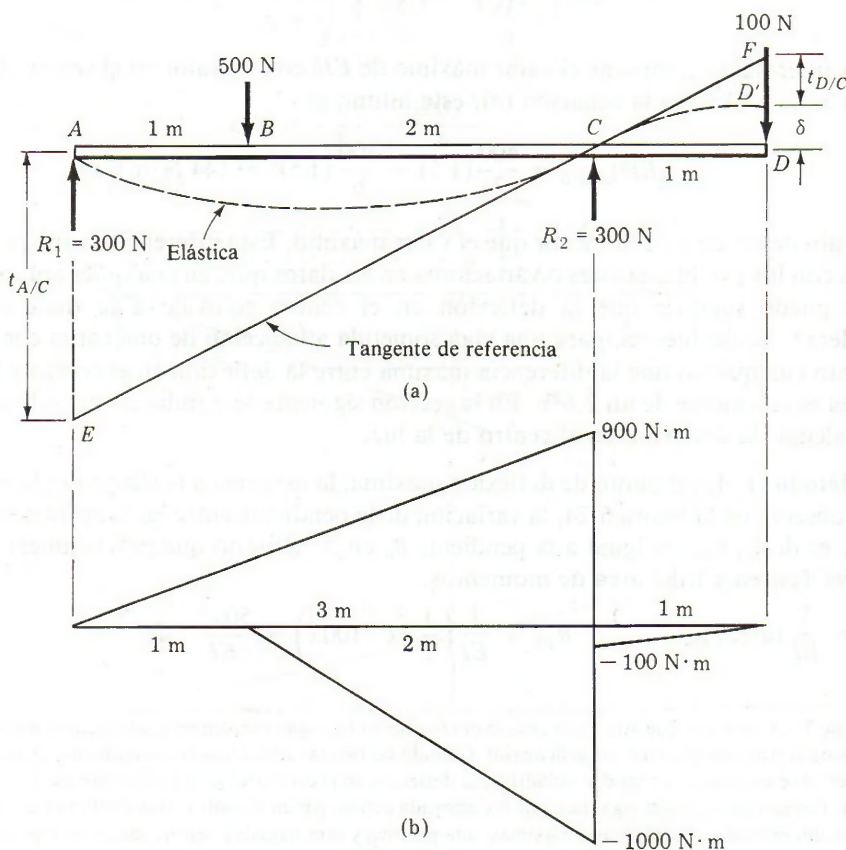


Figura 6-25.

viación indica si A está por debajo o por encima de la tangente y de aquí la dirección en que se inclina la tangente en C . Por consiguiente:

$$\begin{aligned} t_{A/C} &= \frac{1}{EI} (\text{área})_{AC} \cdot \bar{x}_A \\ &= \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} \times 3 \times 900 \right) \left(\frac{2}{3} \times 3 \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 1000 \right) \left(1 + \frac{2}{3} \times 2 \right) \right] = \frac{367}{EI} \end{aligned}$$

El valor positivo de $t_{A/C}$ indica que el punto A de la elástica está por encima de la tangente de referencia en C , con lo que dicha tangente tiene pendiente hacia abajo a la izquierda, como se ha representado en la figura 6-25a.

Por la semejanza de los triángulos ACE y CDF se tiene

$$\frac{DF}{1} = \frac{t_{A/C}}{3}, \text{ o bien, } DF = \frac{t_{A/C}}{3} = \frac{367}{3EI}$$

La desviación de D respecto de la tangente en C es

$$\left[t_{D/C} = \frac{1}{EI} (\text{área})_{DC} \cdot \bar{x}_D \right] \quad t_{D/C} = \frac{1}{EI} \left[- \left(\frac{1 \times 100}{2} \right) \left(\frac{2}{3} \times 1 \right) \right] = - \frac{100}{3EI}$$

El signo menos de $t_{D/C}$ indica que el punto D' de la elástica está por debajo de la tangente de referencia. Por tanto, como DF es numéricamente mayor que el valor absoluto de esta desviación, la deflexión en D es hacia arriba. Por eso se ha dibujado la elástica, punteada, entre C y D como en la figura. Para la deflexión δ se deduce

$$\delta = DF - |t_{D/C}| = \frac{367}{3EI} - \frac{100}{3EI} = \frac{89}{EI} \quad \text{Resp.}$$

Si la tangente de referencia se hubiera trazado en A , y se hubiera supuesto que la elástica tenía la forma de la figura 6-26, se habrían obtenido los resultados siguientes:

$$\begin{aligned} t_{C/A} &= \frac{1}{EI} (\text{área})_{CA} \cdot \bar{x}_C \\ &= \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{3 \times 900}{2} \right) \left(\frac{1}{3} \times 3 \right) - \left(\frac{2 \times 1000}{2} \right) \left(\frac{1}{3} \times 2 \right) \right] = \frac{683}{EI} \\ t_{D/A} &= \frac{1}{EI} (\text{área})_{DA} \cdot \bar{x}_D \\ &= \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{3 \times 900}{2} \right) \left(1 + \frac{1}{3} \times 3 \right) - \left(\frac{2 \times 1000}{2} \right) \left(1 + \frac{1}{3} \times 2 \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1 \times 100}{2} \right) \left(\frac{2}{3} \times 1 \right) \right] \\ &= \frac{1000}{EI} \end{aligned}$$

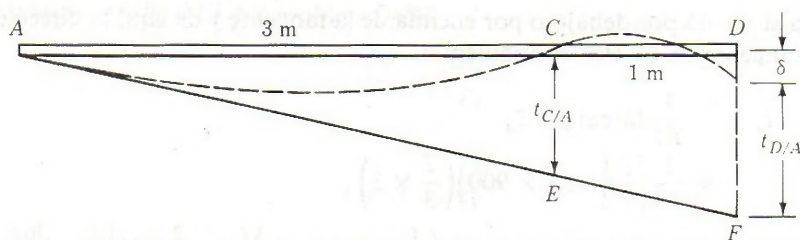


Figura 6-26. Elástica de la viga del problema 652 con la tangente de referencia trazada en A.

Por semejanza de los triángulos ACE y ADF ,

$$\frac{DF}{4} = \frac{t_{C/A}}{3} \quad \text{o} \quad DF = \frac{4}{3} t_{C/A} = \frac{4}{3} \left(\frac{683}{EI} \right) = \frac{911}{EI}$$

Por último, según el esquema de la elástica de la figura 6-26, se obtiene para la deflexión el valor

$$\delta = DF - t_{D/A} = \frac{1}{EI} (911 - 1000) = -\frac{89}{EI}$$

que, salvo el signo, coincide con el obtenido anteriormente. El signo menos indica que la deflexión δ tiene sentido contrario al representado, es decir, es hacia arriba. En efecto, $t_{D/A}$ es numéricamente mayor que DF .

La ventaja fundamental de trazar la tangente de referencia en C es que aumenta la garantía de los cálculos, ya que se manejan números más pequeños.

PROBLEMAS

653. Calcular el valor de la deflexión en el punto medio del claro en la viga representada en la figura P-653. *Indicación:* Trazar el diagrama de momentos por partes, empezando por el centro del claro hacia los extremos. Por simetría, la tangente en el centro es horizontal.

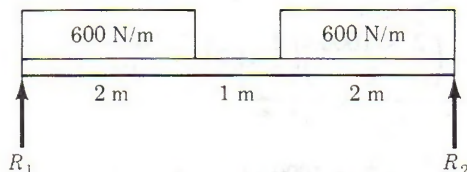


Figura P-653.

Resp. $EI\delta = 3350 \text{ N} \cdot \text{m}^3$

654. Determinar el valor de $EI\delta$ a 1 m de R_2 en la viga de la figura P-654. *Indicación:* Trazar la tangente de referencia en el apoyo derecho.

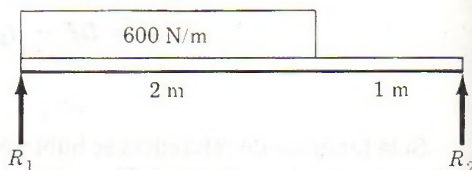


Figura P-654.

655. Obtener el valor de $EI\delta$ bajo la carga concentrada de la viga de la figura P-655.

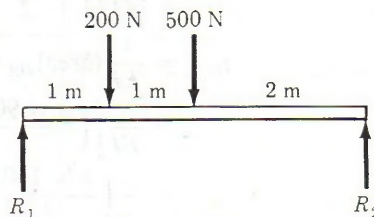


Figura P-655.

Resp. $608 \text{ N} \cdot \text{m}^3$; $850 \text{ N} \cdot \text{m}^3$

656. Calcular el valor de $EI\delta$ bajo la carga concentrada de $100 \text{ N} \cdot \text{m}$ en la viga representada en la figura P-656.

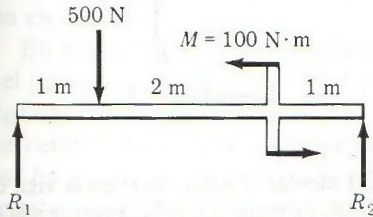


Figura P-656.

Resp. $EI\delta = 342 \text{ N} \cdot \text{m}^3$

657. Calcular la deflexión en el centro de la viga que representa la figura P-657.

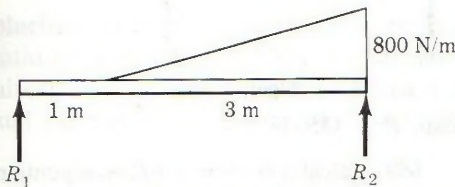


Figura P-657.

658. En la viga que representa la figura P-658, determinar el valor de $EI\delta$ en el punto de aplicación del par M .

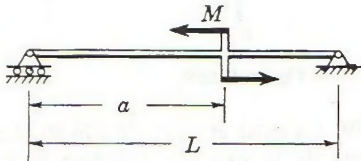


Figura P-658.

Resp. $EI\delta = (Ma/3L)(L^2 - 3La + 2a^2)$

659. Una viga simplemente apoyada soporta una carga concentrada aplicada en un punto cualquiera de su claro, como se indica en la figura P-659. Demostrar que la deflexión máxima tiene lugar a una distancia de A igual a

$$x = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}}$$

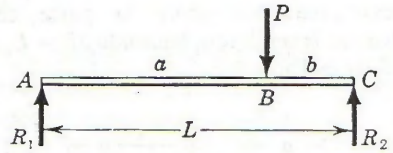


Figura P-659.

660. Una viga simplemente apoyada se somete a la acción de un par M en su extremo derecho, como indica la figura P-660. Demostrar que la deflexión máxima tiene lugar a una distancia $x = 0.577L$ del apoyo izquierdo.



Figura P-660.

661. Calcular la deflexión en el centro del claro de la viga simétricamente cargada representada en la figura P-661. Cotejar el resultado, haciendo $a = L/2$, con el caso 6 de la Tabla 6-2. Compararlo también con la deflexión en el centro para el caso 7 de la Tabla 6-2.

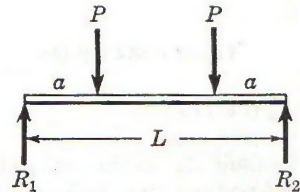


Figura P-661.

662. Determinar la deflexión máxima en la viga representada en la figura P-662. Comparar el resultado obtenido, poniendo $a = L/2$, con el caso 8 de la Tabla 6-2. Utilizar el resultado para comprobar el obtenido en el problema 653.

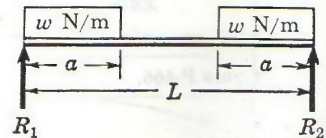


Figura P-662.

663. Calcular la deflexión máxima en la viga de la figura P-663 que soporta una carga unifor-

memente repartida sobre la parte central. Confrontar el resultado, haciendo $2b = L$, con el caso 8 de la Tabla 6-2.

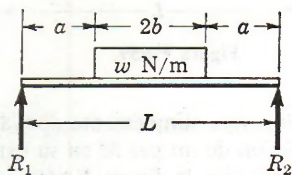


Figura P-663.

Resp. $EI\delta = (wb/24)(L^3 - 2Lb^2 + b^3)$

664. La mitad central de la viga de la figura P-664 tiene un momento de inercia doble que el del resto. Determinar la deflexión en el centro. Indicación: Transformar el diagrama de M en diagrama de M/EI .

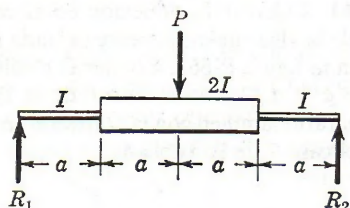


Figura P-664 y P-665.

Resp. $\delta = \frac{3}{4}(Pa^3/EI)$

665. Sustituir la carga concentrada del problema 664 por una carga uniforme de w N/m aplicada sobre la mitad central de la viga. Hallar la deflexión máxima.

666. Calcular $EI\delta$ en el extremo derecho de la viga con voladizo de la figura P-666.

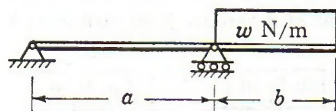


Figura P-666.

Resp. $EI\delta = (wb^3/24)(4a + 3b)$

667. Calcular $EI\delta$ en el extremo derecho de la viga con voladizo de la figura P-667. ¿Qué sentido tiene la deflexión?

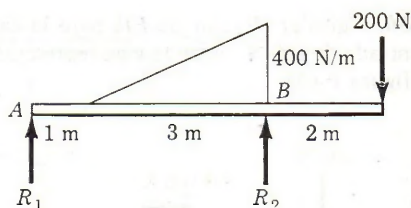


Figura P-667.

668. Calcular el valor de P en la viga de la figura P-668, de manera que la tangente a la elástica en el apoyo derecho sea horizontal.

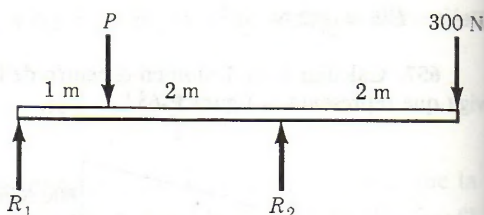


Figura P-668.

Resp. $P = 1350$ N

669. Calcular el valor de $EI\delta$ en el punto medio entre apoyos de la viga de la figura P-669.

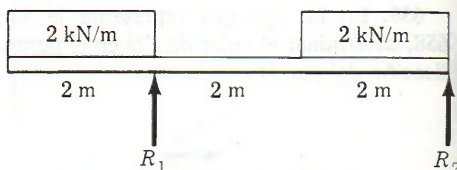


Figura P-669.

670. Calcular el valor de $EI\delta$ en el extremo izquierdo de la viga con voladizo de la figura P-670.

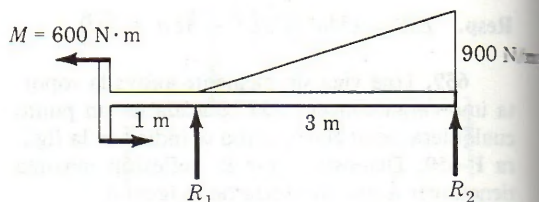


Figura P-670.

Resp. $EI\delta = 428 \text{ N} \cdot \text{m}^3$ descendente

6-7. DEFLEXIONES EN EL CENTRO DEL CLARO

En una viga simplemente apoyada y simétricamente cargada, la tangente a la elástica en el punto medio del claro es horizontal y paralela a la posición de la viga descargada. En tales casos, la desviación de cada extremo apoyado con respecto a esta tangente es igual a la deflexión en el centro.

En el caso de vigas simplemente apoyadas, pero con cargas no simétricas, la deflexión en el punto medio puede calcularse tan fácilmente como en las anteriores. Basta añadir una carga simétricamente colocada con respecto al centro, por cada carga real. La deflexión real en el centro será la mitad de la calculada por la viga transformada. Obsérvese también, como ya se ha dicho, que la diferencia entre la deflexión máxima y la deflexión en el centro es tan pequeña generalmente que ambos valores pueden considerarse prácticamente equivalentes.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

671. Una viga simplemente apoyada de longitud L soporta una carga que varía uniformemente desde cero en el extremo izquierdo hasta w N/m en el apoyo derecho, como indica la figura 6-27a. Calcular la deflexión en el centro del claro.

Solución: Transformemos la carga en simétrica añadiendo otra que varíe uniformemente en sentido inverso, desde cero en el apoyo derecho a w en el izquierdo. El resultado es una carga uniforme en toda la longitud de la viga. La desviación de C con respecto a la tangente en B es igual a 2δ , es decir, el doble de la deflexión real en el centro de la viga de la figura 6-27a.

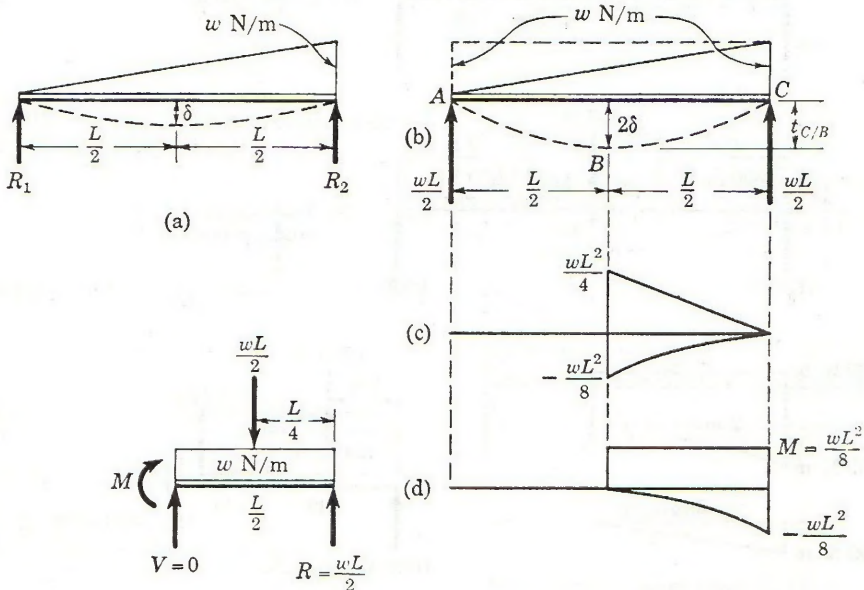


Figura 6-27. Transformación en viga simétricamente cargada.

Puesto que se trata de calcular la desviación de C con respecto a la tangente en B , sólo se necesita el diagrama de momentos de la mitad de la viga. Dicho diagrama se traza por partes, desde C a B , como indica la figura 6-27c, o desde B a C como en la figura 6-27d. Para facilitar la comprensión de esta última figura, a su izquierda se ha dibujado el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la mitad derecha de la viga. Obsérvese que el valor del momento M en el centro se ha determinado teniendo en cuenta que su efecto en el apoyo derecho ha de ser igual y opuesto al de la carga, de manera que resulte momento nulo en dicho apoyo.

Apliquemos, pues, el teorema del área de momentos al diagrama de la figura (d), dejando al lector la comprobación de que, aplicándolo a la figura (c), se obtiene el mismo resultado:

$$[EI\theta_{C/B} = (\text{área})_{CB} \cdot \bar{x}_C]$$

$$2EI\delta = \left(\frac{wL^2}{8} \cdot \frac{L}{2}\right)\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{L}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{wL^2}{8} \cdot \frac{L}{2}\right)\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{L}{2}\right) = \frac{5}{384} wL^4$$

de donde resulta:

$$EI\delta = \frac{5}{768} wL^4$$

Resp.

672. Determinar el valor de $EI\delta$ en el centro del claro de la viga sometida a las cargas indicadas en la figura 6-28a.

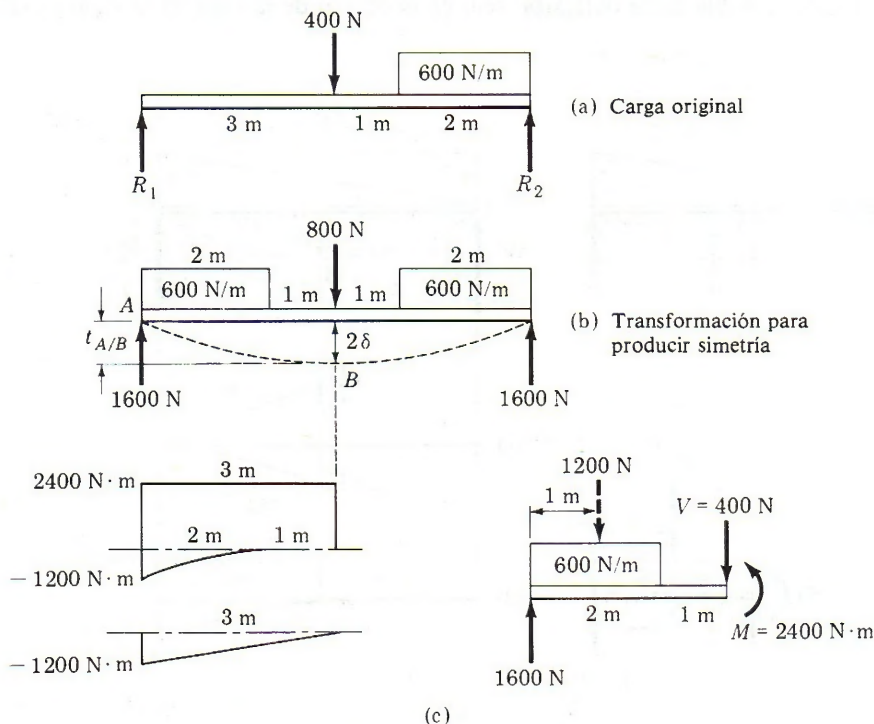


Figura 6-28. Deflexión en el centro del claro.

Solución: La transformación en carga simétrica se indica en la figura 6-28b. Puesto que sólo se va utilizar el diagrama de momento (M) de la mitad de la viga, se ha trazado para la mitad izquierda en la figura 6-28c, junto con el correspondiente diagrama de cuerpo libre. El valor del momento en el centro se ha obtenido como en el problema anterior. Obsérvese también que la reacción en la viga transformada es la mitad de la carga simétrica es decir, que equivale a la suma de las cargas reales iniciales.

La desviación $t_{A/B}$ de A respecto de la tangente horizontal en B es igual al doble de la deflexión pedida de la viga inicial. Se tiene:

$$[EI t_{A/B} = (\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A]$$

$$2EI\delta = (2400 \times 3)\left(\frac{1}{2} \times 3\right) - \left(\frac{2 \times 1200}{3}\right)\left(\frac{1}{4} \times 2\right) - \left(\frac{3 \times 1200}{2}\right)\left(\frac{1}{3} \times 3\right)$$

de donde

$$EI\delta = 4300 \text{ N} \cdot \text{m}^3$$

Resp.

PROBLEMAS

673. Demostrar que la deflexión en el centro del claro de la viga de la figura P-673 es $\delta = (Pb/48EI)(3L^2 - 4b^2)$.

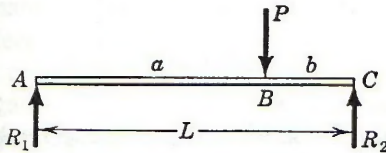


Figura P-673.

674. Determinar la deflexión en el centro del claro de la viga de la figura P-674.



Figura P-674.

675. Repetir el problema anterior en el caso de la figura P-675.

Resp. $\delta = wa^2L^2/32EI$



Figura P-675.

676. Calcular la deflexión en el centro del claro en el caso de una viga con un par aplicado como se indica en la figura P-676.

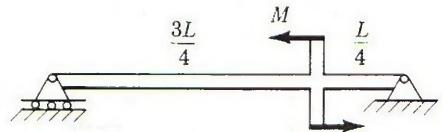


Figura P-676.

677. Determinar la deflexión en el centro del claro en la viga cargada como indica la figura P-677.

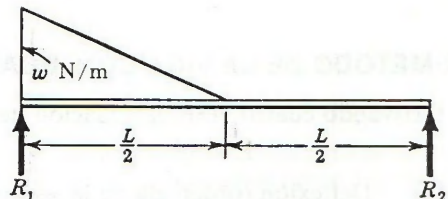


Figura P-677.

678. Determinar el valor de $EI\delta$ en el centro de la viga de la figura P-678.

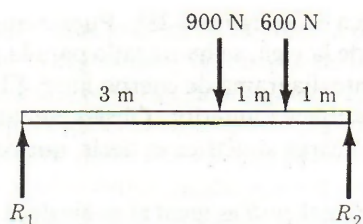


Figura P-678.

Resp. $EI\delta = 3\,100 \text{ N} \cdot \text{m}^3$

679. Determinar el valor de $EI\delta$ en el centro de la viga de la figura P-679.

Resp. $EI\delta = 2940 \text{ N} \cdot \text{m}^3$

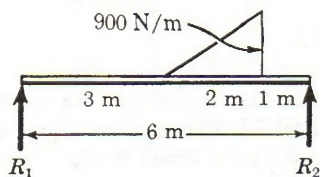


Figura P-679.

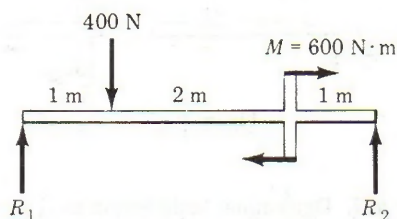
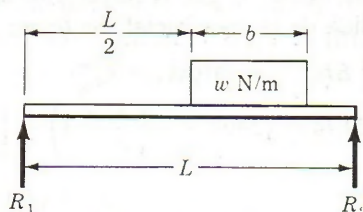


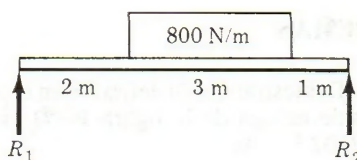
Figura P-680.

680. Determinar el valor de $EI\delta$ en el centro de la viga cargada como indica la figura P-680.

681. Demostrar que el valor de $EI\delta$ en el centro de la viga de la figura P-681, parte (a), es



(a)



(b)

Figura P-681.

$(wb/48)(L^3 - 2Lb^2 + b^3)$. Aplicar el resultado obtenido para hallar el valor del claro en el centro de la viga de la figura (b), descomponiendo la carga dada en dos partes, a partir del centro de la viga, a uno y otro lado, y sumando los resultados.

Resp. $EI\delta = 9280 \text{ N} \cdot \text{m}^3$

6-8. MÉTODO DE LA VIGA CONJUGADA

Derivando cuatro veces la ecuación de la elástica se obtienen las siguientes relaciones:

EIy : Deflexión (ordenada de la elástica)

$EI \frac{dy}{dx}$: Pendiente (θ)

$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \text{Momento} = M$

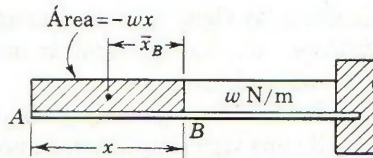


Figura 6-29.

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} = \text{Fuerza cortante} = V = \frac{dM}{dx}$$

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = \text{Carga} = \frac{dV}{dx} = \frac{d^2 M}{dx^2}$$

Resulta evidente que las relaciones entre deflexión, pendiente y momento son las mismas que las que existen entre momento, fuerza cortante y carga. Esto sugiere que puede aplicarse el método del área de momentos para determinar el momento flexionante, partiendo del diagrama de cargas, de la misma manera que se ha empleado determinar para las deflexiones a partir del diagrama de momentos. Por ejemplo, en el diagrama de cargas de la figura 6-29, es $(-wx) \left(\frac{1}{2}x\right) = -\frac{wx^2}{2}$. Por tanto, se podría aplicar el método del área de momentos, que ahora sería de área de cargas, para determinar el momento flexionante, aunque no es práctico.

Sin embargo, la analogía de las relaciones entre carga-fuerza cortante-momento flexionante, y entre momento-pendiente-deflexión, sugiere que estas últimas se pueden establecer mediante los métodos desarrollados en el Capítulo 4 para calcular la fuerza cortante y el momento flexionante a partir de las cargas. Para ello, hay que suponer que la viga está cargada, no con las cargas reales, sino con el diagrama de M/EI correspondiente a dichas cargas. Considerando entonces este diagrama de M/EI como una carga ficticia, se calcula la fuerza cortante y el momento flexionante ficticios, en un punto cualquiera, que se corresponden con la pendiente y las ordenadas de la elástica en los mismos puntos de la viga inicial. El procedimiento se llama *método de la viga conjugada*. También se denomina a veces método de las cargas elásticas.

Aplicando, pues, a una viga* cargada con el diagrama de M/EI los principios estudiados para la determinación de la fuerza cortante y momento flexionante se tiene:

$$1. \text{ Pendiente real} = \text{fuerza cortante ficticia} \quad (6-6)$$

$$2. \text{ Deflexión real} = \text{momento flexionante ficticio} \quad (6-7)$$

* N. de T. Analíticamente, la doble integración momento-pendiente-deflexión de la viga principal introduce dos constantes y la doble integración carga ficticia (M/EI)-fuerza cortante ficticia-momento ficticio de la viga conjugada, introduce otras dos constantes de integración.

Para que los resultados sean equivalentes, las condiciones aplicadas para la determinación de las constantes tienen que ser forzosamente las mismas en las dos integraciones. De aquí que, en general, la viga principal y la conjugada no podrán tener las mismas condiciones de apoyo. En las vigas estáticamente determinadas, en las que la viga conjugada también lo es, las reglas de transformación de apoyos son las siguientes:

1. Un apoyo extremo en la viga principal (deflexión, o sea, segunda integración, nula) ha de transformarse en un apoyo (M ficticio, o sea, segunda integración, nulo) en la viga conjugada.

El método es directamente aplicable a las vigas simplemente apoyadas. En otros casos, tales como ménsulas, vigas con voladizos, etc., hay que aplicar otras condiciones artificiales de sujeción o apoyos y se estudiarán más adelante.

Para valorar la utilidad del método de la viga conjugada, comparémoslo con el método del área de momentos para el caso de una viga simplemente apoyada, ya que solamente en este tipo de vigas se puede aplicar directamente el método de la viga conjugada sin cambiar las condiciones de sujeción. Esto quiere decir que en las vigas simplemente apoyadas en sus extremos, la viga conjugada es otra viga igual.

En la figura 6-30a se tiene una viga apoyada en sus extremos, con una carga uniformemente repartida. El diagrama de momentos para esta carga, wN/m , dibujado por partes en la figura 6-30b, se multiplica por $1/EI$ y se aplica como carga a la viga conjugada, otra viga simplemente apoyada y del mismo claro L , como se indica en la figura 6-30c. Para determinar la reacción R_1 a la viga conjugada, se toman momentos de las cargas ficticias con respecto de B ,

$$[\Sigma M_B = 0] \quad R_1 L = \left(\frac{wL^2}{2EI} \cdot \frac{L}{2} \right) \left(\frac{L}{3} \right) - \left(\frac{wL^2}{2EI} \cdot \frac{L}{3} \right) \left(\frac{L}{4} \right) \quad (a)$$

El segundo miembro de esta ecuación es, precisamente, $1/EI (\text{área})_{BA} \cdot \bar{x}_B$, es decir, $t_{B/A}$. Naturalmente, al despejar R_1 el resultado es $t_{B/A}/L$, que es la pendiente en A . Esto es geométricamente evidente, como se deduce de la figura 6.30a. Queda, pues, confirmada la regla 1 del método de la viga conjugada, es decir, que la fuerza cortante ficticia es igual a la pendiente de la elástica de la viga original, en el mismo punto.

Para obtener la ordenada de la elástica en un punto cualquiera de la viga original se aplica la definición de momento flexionante a la viga conjugada:

$$\begin{aligned} \text{Deflexión } y &= (\Sigma M)_{izq} = R_1 x - A_1 \frac{x}{3} + A_2 \frac{x}{4} \\ &= R_1 x - \left(A_1 \frac{x}{3} - A_2 \frac{x}{4} \right) \end{aligned} \quad (b)$$

2. Un apoyo intermedio en la viga principal (deflexión, o sea, segunda integración, nula; y pendiente, o primera integración, cualquiera, pero igual a ambos lados) ha de transformarse en una articulación de la viga conjugada (M ficticio, o sea, segunda integración, nulo; V ficticia, o sea, primera integración, cualquiera, pero igual a ambos lados).

3. Un extremo empotrado de la viga principal (pendiente y deflexión, o sea, primera y segunda integración, nulas) ha de transformarse en un extremo libre en la viga conjugada (V ficticia y M ficticio, o sea, primera y segunda integración, nulas).

4. Un extremo libre en la viga principal (pendiente y deflexión, o sea, primera y segunda integración, lo que corresponda por las restantes condiciones de sujeción y momentos flexionantes) ha de transformarse en un extremo empotrado en la viga conjugada (V ficticia y M ficticio, o sea, primera y segunda integración, lo que corresponda por las restantes condiciones de sujeción y cargas ficticias).

5. Una articulación en la viga principal (pendiente o primera integración distinta a cada lado, y deflexión, o segunda integración, igual a ambos lados, dependiendo sus valores de las demás condiciones de sujeción y momentos flexionantes) ha de transformarse en un apoyo intermedio de la viga conjugada (V ficticia, o sea, primera integración, distinta a cada lado, y M ficticio, o sea segunda integración, igual a ambos lados, dependiendo sus valores de las restantes condiciones de sujeción y cargas ficticias).

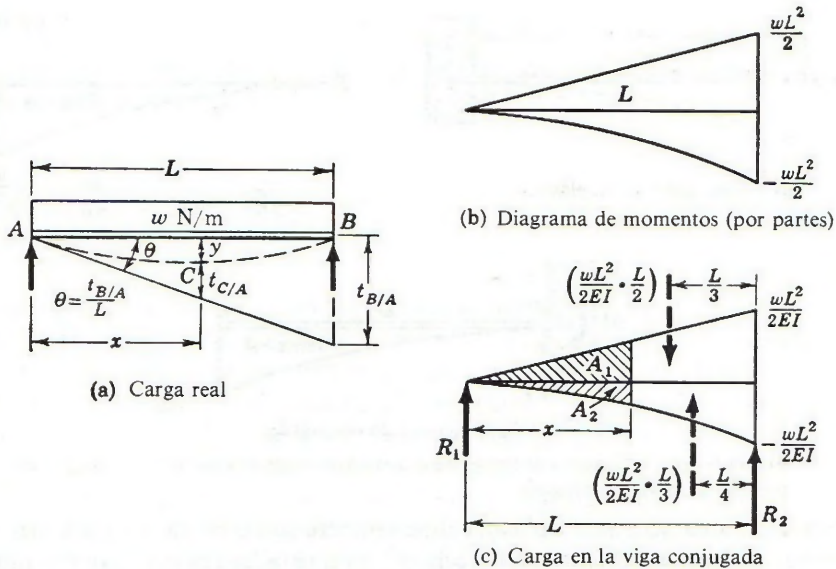


Figura 6-30. Comparación entre los métodos de la viga conjugada y del área de momentos.

Ahora bien, en función del diagrama de momentos de la figura 6-30b, $[A_1 \cdot (x/3) - A_2 \cdot (x/4)]$ es igual precisamente a $(1/EI) (\text{área})_{CA} \cdot x_C$, es decir, $t_{C/A}$ de la elástica de la figura 6-30a. Por lo que la ecuación (b) se puede escribir en la forma

$$y = R_1 x - t_{C/A} \quad (c)$$

que, como $R_1 x = \theta x = (t_{B/A}/L)x$, equivale a la siguiente relación del método del área de momentos:

$$y = t_{B/A} \left(\frac{x}{L} \right) - t_{C/A} \quad (d)$$

Este es precisamente el resultado que se obtuvo en la sección 6-6 para la deflexión en un punto de una viga simplemente apoyada por el método del área de momentos.

Así, pues, el método de la viga conjugada, utilizando la fuerza cortante y el momento flexionante de una carga ficticia M/EI para determinar la pendiente y la ordenada de la elástica, aplica realmente los mismos cálculos que el método del área de momentos, pero con el inconveniente de no poner de manifiesto el significado físico de dichos cálculos. Este inconveniente es aún mayor cuando se aplica a las ménsulas y a las vigas con voladizos, en las que hay que cambiar las condiciones de sujeción de la viga conjugada. No obstante, tiene la ventaja de poderse aplicar mecánicamente, lo que es muy interesante para trabajos de rutina, en los que permite la aplicación directa de las definiciones de fuerza cortante y momento flexionante a la carga ficticia, sin necesidad de pensar, ni de ayudarse con dibujos de la elástica para ver qué relaciones geométricas hay que aplicar, ni de tener en cuenta el signo de las desviaciones, ni el sentido de la inclinación de las tangentes a la elástica, etc.

Vamos a ver algo sobre la necesidad de cambiar las condiciones de apoyo o sujeción en ciertos casos. Para la viga en voladizo de la figura 6-31a se ha trazado en (b) el diagrama de

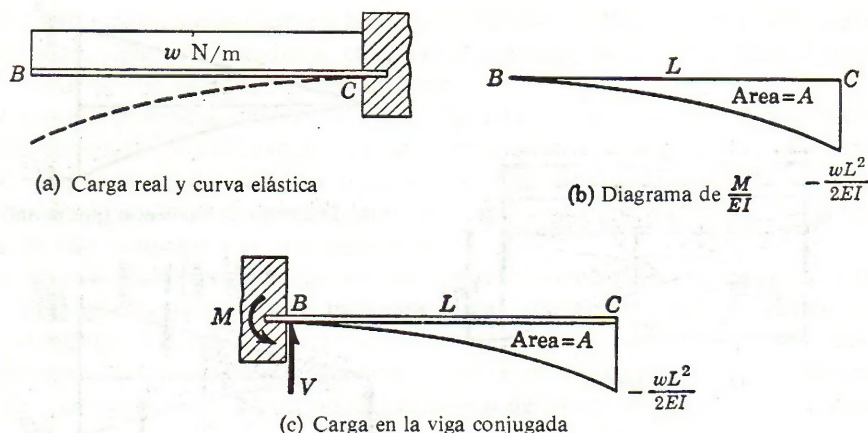


Figura 6-31. Condiciones de apoyo necesarias para resolver vigas en voladizo por el método de la viga conjugada.

M/EI . Este diagrama no puede aplicarse directamente como carga ficticia a otra viga igual, con su empotramiento en el extremo derecho C , ya que la fuerza cortante y el momento flexionante ficticios en B serían nulos, mientras que la pendiente y la ordenada en B de la viga original no lo son. Por ello, la viga conjugada no puede ser igual que la original, sino modificada, como se observa en la figura 6-31c, de manera que en B exista una fuerza cortante y un momento flexionante ficticios que se correspondan con la pendiente y la deflexión reales.

Ahora bien, la pendiente y la deflexión de la viga principal en C son nulas. Por tanto, la fuerza cortante ficticia debe ser nula, es decir,

$$[V = (\Sigma Y)_{izq}] \quad 0 = V - A$$

de donde se deduce que la fuerza cortante en B de la viga conjugada debe ser igual al área del diagrama de carga ficticia M/EI . Además, para tener momento ficticio nulo en C , tiene que existir en B un momento ficticio M tal que

$$[M_C = (\Sigma M)_{izq}] \quad 0 = M + VL - A \frac{L}{4}$$

de donde, como $V = A$, se tiene

$$M = -AL + A \frac{L}{4} = -A \left(L - \frac{L}{4} \right)$$

y como $L - L/4$ es precisamente $\bar{x}_B$ del área de momentos, se deduce que M y V son las reacciones de empotramiento de una viga empotrada en B y libre en C y, por tanto, la viga conjugada en el caso de tal viga es otra de la misma longitud, pero con el empotramiento en el extremo libre, y viceversa.

Sólo después de esto pueden calcularse la fuerza cortante y el momento flexionante ficticios correspondientes a la pendiente y ordenadas de la elástica real. En realidad, los problemas del tipo de vigas en voladizo se pueden resolver de forma más directa aplicando el método del área de momentos, aunque el método de la viga conjugada, después del cambio de la sección de empotramiento que se ha indicado, viene a ser exactamente lo mismo y con el que se llega a los mismos cálculos.

PROBLEMAS

Resolver los problemas 653 a 665, ambos inclusive, y los casos 6 a 12 de la Tabla 6-2 mediante el método de la viga conjugada.

6-9. DEFLEXIONES POR EL MÉTODO DE SUPERPOSICIÓN

Como método suplementario para la evaluación de pendientes y ordenadas de la elástica se pueden utilizar los resultados de algunos tipos sencillos de cargas, para obtener, por suma de efectos, las soluciones correspondientes a cargas más complicadas. Este procedimiento, llamado *método de superposición*, determina la pendiente y la deflexión en un punto de una viga por suma de las pendientes o de las deflexiones producidas, en ese mismo punto, por cada una de las cargas cuando éstas actúan por separado. La única restricción o condición impuesta para poder aplicar este método es que cada carga aislada no debe producir un cambio apreciable en la forma inicial o en la longitud de la viga, esto es, la actuación de cada carga no debe influir en la forma de actuar de las demás.

La aplicación del método de superposición presenta notables ventajas, sobre todo cuando las cargas son una combinación de los tipos que aparecen en la Tabla 6-2. Para cargas parcialmente distribuidas, el método requiere una integración (véase fig. P-683). En tales casos, es preferible el método de la doble integración. Si de lo que se trata es de calcular la deflexión o la pendiente en un punto determinado, lo mejor es el método del área de momentos.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

682. Mediante el método de superposición, calcular el valor de $EI\delta$ en el centro de la viga de la figura 6-32a con dos cargas concentradas.

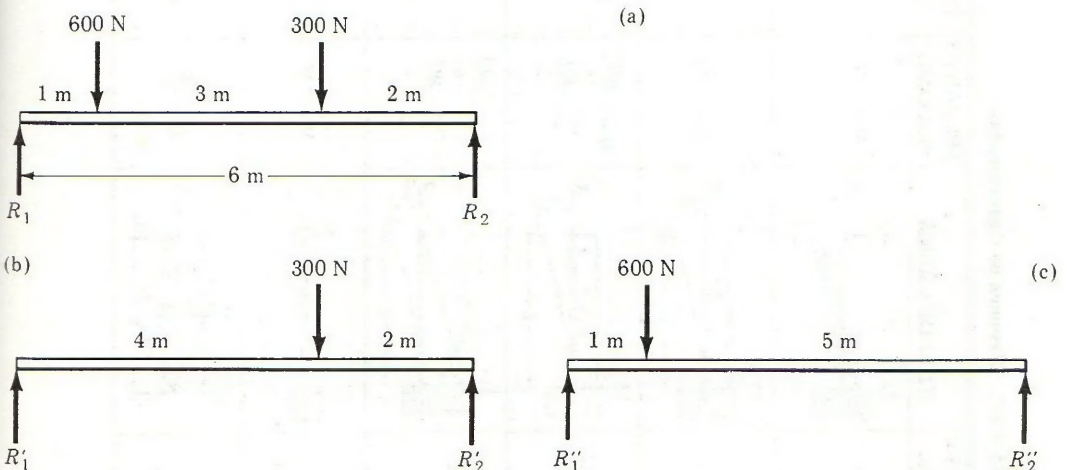
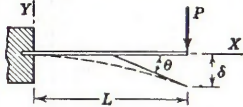
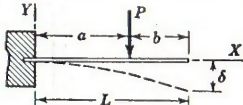
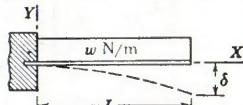
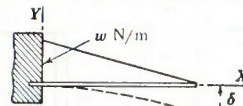
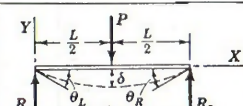


Figura 6-32.

TABLA 6-2. Resumen de vigas cargadas

CASO No.	TIPO DE CARGA	MOMENTO MÁXIMO	PENDIENTE EN EL EXTREMO	ECUACIÓN DE LA ELÁSTICA (y es positiva hacia abajo)	DEFLEXIÓN MÁXIMA
1		$M = -PL$	$\theta = \frac{PL^2}{2EI}$	$EIy = \frac{Px^2}{6}(3L - x)$	$\delta = \frac{PL^3}{3EI}$
2		$M = -Pa$	$\theta = \frac{Pa^2}{2EI}$	$EIy = \frac{Px^2}{6}(3a - x) \quad \text{para } 0 < x < a$ $EIy = \frac{Pa^2}{6}(3x - a) \quad \text{para } a < x < L$	$\delta = \frac{Pa^2}{6EI}(3L - a)$
3		$M = -\frac{wL^2}{2}$ $= -\frac{WL}{2}$	$\theta = \frac{wL^3}{6EI}$ $= \frac{WL^2}{6EI}$	$EIy = \frac{wx^2}{24}(6L^2 - 4Lx + x^2)$	$\delta = \frac{wL^4}{8EI} = \frac{WL^3}{8EI}$
4		$M = -\frac{wL^2}{6}$ $= -\frac{WL}{3}$	$\theta = \frac{wL^3}{24EI}$ $= \frac{WL^2}{12EI}$	$EIy = \frac{wx^2}{120L}(10L^3 - 10L^2x + 5Lx^2 - x^3)$	$\delta = \frac{wL^4}{30EI} = \frac{WL^3}{15EI}$
5		$M = -M$	$\theta = \frac{ML}{EI}$	$EIy = \frac{Mx^2}{2}$	$\delta = \frac{ML^2}{2EI}$
6		$M = \frac{PL}{4}$	$\theta_L = \theta_R = \frac{PL^2}{16EI}$	$EIy = \frac{Px}{12}\left(\frac{3}{4}L^2 - x^2\right) \quad \text{para } 0 < x < \frac{L}{2}$	$\delta = \frac{PL^3}{48EI}$

7		$M = \frac{Pab}{L}$ en $x = a$	$\theta_L = \frac{Pb(L^2 - b^2)}{6EIL}$ $\theta_R = \frac{Pa(L^2 - a^2)}{6EIL}$	$EIy = \frac{Pbx}{6L}(L^2 - x^2 - b^2)$ para $0 < x < a$ $EIy = \frac{Pb}{6L} \left[\frac{L}{b}(x-a)^3 + (L^2 - b^2)x - x^3 \right]$ para $a < x < L$	$\delta = \frac{Pb(L^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3} EIL}$ en $x = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}}$ En el centro (no la máx.) $\delta = \frac{Pb}{48EI} (3L^2 - 4b^2)$ cuando $a > b$
8		$M = \frac{wL^2}{8}$ $= \frac{WL}{8}$	$\theta_L = \theta_R = \frac{wL^3}{24EI}$	$EIy = \frac{wx}{24}(L^3 - 2Lx^2 + x^3)$	$\delta = \frac{5wL^4}{384EI} = \frac{5WL^3}{384EI}$
9		$M = \frac{wL^2}{9\sqrt{3}}$ $= \frac{2WL}{9\sqrt{3}}$	$\theta_L = \frac{7wL^3}{360EI}$ $\theta_R = \frac{8wL^3}{360EI}$	$EIy = \frac{wx}{360L}(7L^4 - 10L^2x^2 + 3x^4)$	$\delta = \frac{2.5wL^4}{384EI} = \frac{5WL^3}{384EI}$ en $x = 0.519L$
10		$M = \frac{wL^2}{12}$ $= \frac{WL}{6}$	$\theta_L = \theta_R = \frac{5wL^3}{192EI}$	$EIy = \frac{wx}{960L}(25L^4 - 40L^2x^2 + 16x^4)$ para $0 < x < \frac{L}{2}$	$\delta = \frac{wL^4}{120EI} = \frac{WL^3}{60EI}$
11		$M = M$	$\theta_L = \frac{ML}{6EI}$ $\theta_R = \frac{ML}{3EI}$	$EIy = \frac{MLx}{6} \left(1 - \frac{x^2}{L^2} \right)$	$\delta = \frac{ML^2}{9\sqrt{3} EI}$ en $x = \frac{L}{\sqrt{3}}$ En el centro (no la máx.) $\delta = \frac{ML^2}{16EI}$
12		$M = M$	$\theta_L = \frac{ML}{3EI}$ $\theta_R = \frac{ML}{6EI}$	$EIy = \frac{Mx}{6L}(L-x)(2L-x)$	$\delta = \frac{ML^2}{9\sqrt{3} EI}$ en $x = \left(L - \frac{L}{\sqrt{3}} \right)$ En el centro (no la máx.) $\delta = \frac{ML^2}{16EI}$

Solución: Según el caso 7 de la Tabla 6-2, la deflexión en el centro del claro para una carga concentrada aplicada excéntricamente vale $EI\delta = (Pb/48)(3L^2 - 4b^2)$, en donde b es el menor de los segmentos que determina la carga sobre la viga. Descomponiendo el sistema de cargas en las dos indicadas en las figuras 6-32(b) y (c), la deflexión en el centro de (a) es la suma de las deflexiones en el centro de (b) y de (c). Por tanto,

$$\begin{aligned} EI\delta &= \sum \frac{Pb}{48} (3L^2 - 4b^2) \\ &= \frac{300(2)}{48} [3(6)^2 - 4(2)^2] + \frac{600(1)}{48} [3(6)^2 - 4(1)^2] \\ &= 2450 \text{ N} \cdot \text{m}^3 \end{aligned}$$

Resp.

683. Una viga simplemente apoyada soporta una carga uniforme sobre parte de su longitud, como se indica en la figura 6-33. Calcular el valor de $EI\delta$ en el centro.

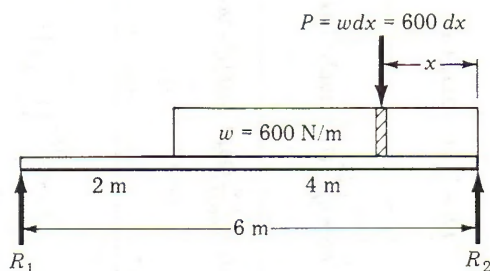


Figura 6-33.

Solución: La carga uniforme se puede considerar como una serie de cargas concentradas elementales de valor $P = w dx = 600 dx$ cada una, situadas a distancia x del extremo. Aplicando el caso 7 de la Tabla 6-2, la deflexión en el centro es:

$$\begin{aligned} EI\delta &= \sum \frac{Pb}{48} (3L^2 - 4b^2) \\ &= \int_0^3 \frac{(600 dx)(x)}{48} [3(6)^2 - 4x^2] + \int_2^3 \frac{(600 dx)(x)}{48} [3(6)^2 - 4x^2] \\ &= 5063 + 2562 = 7625 \text{ N} \cdot \text{m}^3 \end{aligned}$$

Resp.

Se necesitan dos integraciones, una entre 0 y 3, para los elementos que están en la mitad derecha de la viga, y otra entre 2 y 3 para los elementos en la mitad izquierda. En efecto, x , que sustituye a b en la fórmula, es la longitud del menor segmento que determina la carga $600 dx$ sobre la viga.

Dividiendo la carga dada en dos partes iguales, y sustituyendo cada una de ellas por su resultante de 1200 N aplicados en el centro de gravedad, como indica la figura 6-34, la suma de las deflexiones en el centro producidas por estas dos cargas concentradas da una buena aproximación de la deflexión real. Aplicando el resultado del caso 7 de la tabla, se tiene:

$$EI\delta = \frac{1200(1)}{48} [3(6)^2 - 4(1)^2] + \frac{1200(3)}{48} [3(6)^2 - 4(3)^2] = 8000 \text{ N} \cdot \text{m}^3$$

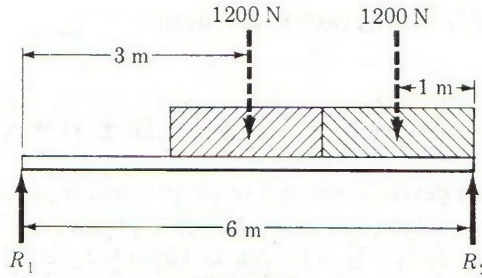


Figura 6-34.

Se consigue mayor aproximación dividiendo la carga en tres o más partes iguales. Sin embargo, como se ha podido comprobar, aun con sólo una división en dos, la deflexión obtenida es únicamente un 5% mayor que el valor correcto de $7625 \text{ N} \cdot \text{m}^3$.

684. La viga con voladizo de la figura 6-35 soporta una carga concentrada P en su extremo libre. Calcular la deflexión en el punto de aplicación de la carga.

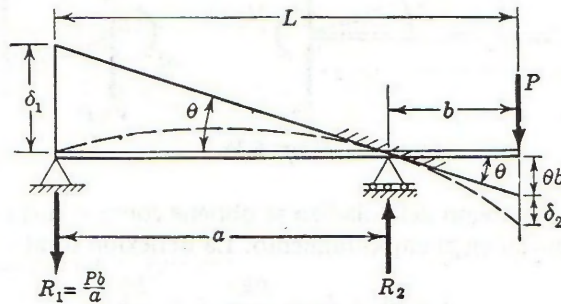


Figura 6-35.

Solución: La tangente a la elástica en el punto R_2 forma un ángulo muy pequeño con la horizontal. Imaginemos que la viga, en su posición inicial, coincidiera con esta tangente y estuviera sujeta de manera que su inclinación en R_2 no pudiera modificarse. La aplicación de R_1 y P reproducirían la elástica verdadera. Las deflexiones δ_1 y δ_2 producidas por estas cargas son del tipo del caso 1 de la Tabla 6-2. Teóricamente estas deflexiones serían perpendiculares a la posición inicial ficticia de la viga, pero, como siempre, y por tratarse de ángulos muy pequeños, las proyecciones sobre la vertical $\delta \cos \theta$ son prácticamente iguales a δ , es decir, que no existe diferencia alguna salvo un infinitésimo de orden superior, entre las deflexiones perpendiculares a la tangente y las verticales.

Geométricamente se tiene

$$\delta_1 = \theta a; \quad \text{de donde} \quad \theta = \frac{\delta_1}{a}$$

por lo que la deflexión en P es

$$y = \theta b + \delta_2 = \delta_1 \frac{b}{a} + \delta_2$$

donde, al sustituir $\delta = PL^3/3EI$ del caso 1, obtenemos

$$y = \frac{Pb}{3EI} \cdot \frac{a^3}{a} + \frac{Pb^3}{3EI} = \frac{Pb^2}{3EI} (a + b) = \frac{Pb^2L}{3EI} \quad \text{Resp.}$$

En realidad, δ_1 y δ_2 son desviaciones con respecto a una tangente trazada por R_2 , por lo que este procedimiento es el mismo que el descrito en el problema 652. La única diferencia es el procedimiento de cálculo de δ_1 y δ_2 , aquí por la Tabla 6-2 y en el otro por el diagrama de momentos.

Otra solución: La pendiente de la elástica en R_2 también se puede calcular dividiendo ésta en las dos partes que indica la figura 6-36. La acción del voladizo sobre la porción de viga entre apoyos se puede sustituir por la fuerza cortante P y el momento Pb . La fuerza cortante se transmite directamente a la reacción R_2 , y el par produce el efecto del caso 11 de la Tabla 6-2. En estas condiciones, la inclinación de la viga en R_2 es $\theta = ML/3EI = (Pb)a/3EI$.

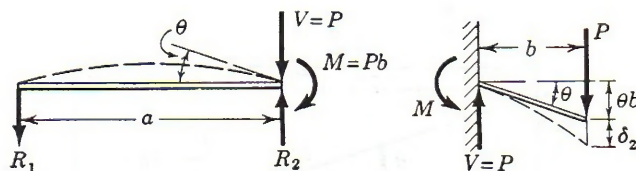


Figura 6-36.

La deflexión en el extremo del voladizo se obtiene como si fuera una ménsula, caso 1, con una inclinación inicial en el empotramiento. La deflexión total viene dada por:

$$y' = \theta b + \delta_2 = \frac{Pba}{3EI} \cdot b + \frac{Pb^3}{3EI}$$

que, como antes, se reduce a

$$y = \frac{Pb^2}{3EI} (a + b) = \frac{Pb^2L}{3EI}$$

La ecuación de la elástica entre los apoyos es, según el caso 11,

$$y = \frac{Pbax}{6EI} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)$$

y en función de x , medido desde R_2 , la ecuación de la elástica de la parte volada viene expresada por:

$$y = \frac{Pba}{3EI} x + \frac{Px^2}{6EI} (3b - x)$$

685. Dos vigas en voladizo, del mismo material y de la misma sección, soportan conjuntamente una carga uniformemente repartida de w N/m, como indica la figura 6-37. Determinar la fuerza P transmitida por el rodillo colocado entre ambas.

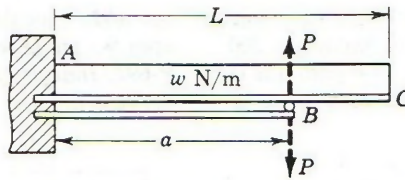


Figura 6-37.

Solución: La fuerza P se determina por la condición de que en B ambas vigas han de tener la misma deflexión. Para la viga inferior, por el caso 1, se tiene:

$$\delta = \frac{Pa^3}{3EI}$$

Para la viga superior, cargada con una combinación de las cargas de los casos 3 y 2, la deflexión resultante en B es

$$\delta = \frac{wa^2}{24EI}(6L^2 + a^2 - 4La) - \frac{Pa^3}{3EI}$$

Igualando estas deflexiones se obtiene para P ,

$$P = \frac{w}{16a}(6L^2 + a^2 - 4La)$$

Resp.

PROBLEMAS

Para resolver los problemas siguientes utilícese la Tabla 6-2.

686. Determinar el valor de $EI\delta$ bajo cada carga concentrada de la figura P-686.

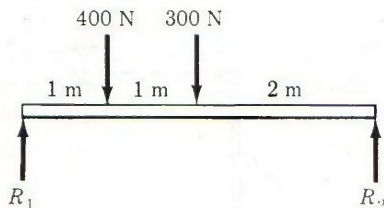


Figura P-686.

Resp. $575 \text{ N} \cdot \text{m}^3$; $767 \text{ N} \cdot \text{m}^3$

687. Calcular la deflexión en el centro del claro, en la viga de la figura P-687, con $E = 10 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ e $I = 20 \times 10^6 \text{ mm}^4$.

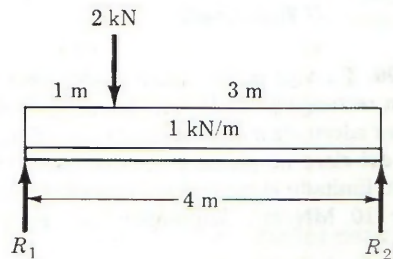


Figura P-687.

Resp. 25.8 mm

688. Determinar el valor de $EI\delta$ en el punto central entre apoyos de la viga de la figura P-688.

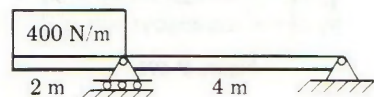


Figura P-688.

689. La viga de la figura P-689 tiene una sección rectangular de 100 mm de ancho por 200 mm de altura. Calcular el valor de P para que la deflexión en el centro valga 40 mm. $E = 10 \times 10^9 \text{ N/m}^2$.

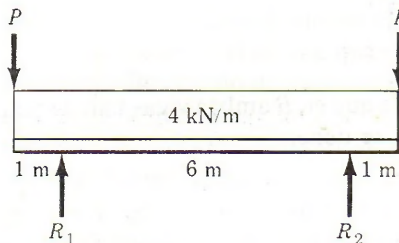


Figura P-689.

Resp. $P = 7.07 \text{ kN}$

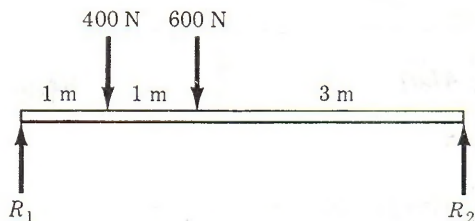


Figura P-690.

690. La viga de la figura P-690 tiene una sección rectangular de 50 mm de ancho. Calcule la altura adecuada d de la viga si la deflexión, a la mitad del claro no puede ser mayor que 20 mm, estando limitado el esfuerzo por flexión a un valor de 10 MN/m^2 . Supóngase que $E = 10 \text{ GN/m}^2$.

691. Determinar la deflexión en el centro del claro en la viga de la figura P-691. Indicación: Aplicar el caso 7 e integrar.

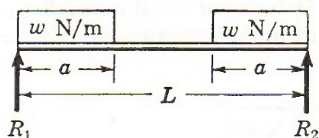


Figura P-691.

Resp. $EI\delta = (wa^2/48)(3L^2 - 2a^2)$

692. Calcular $EI\delta$ en el punto medio entre apoyos, en la viga con voladizo de la figura P-692. Indicación: Combinar el caso 11 y parte del caso 8.

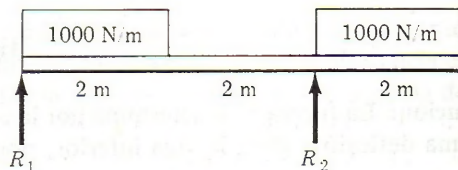


Figura P-692.

693. En la figura P-693 calcular el valor de $EI\delta$ en el extremo derecho de la viga mostrada.

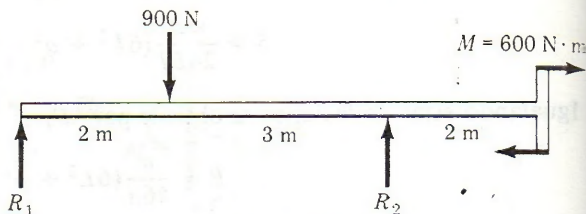


Figura P-693.

Resp. $EI\delta = 680 \text{ N} \cdot \text{m}^3$, descendente

694. La estructura de la figura P-694 es de sección constante y está perfectamente empotrada en su extremo inferior. Calcular la deflexión vertical producida en su punto de aplicación por el par M .

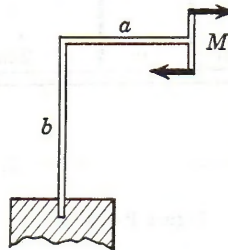


Figura P-694 y P-695.

Resp. $\delta = \frac{Ma}{EI} (b + \frac{a}{2})$

695. Resolver el problema anterior si se sustituye el par por una fuerza P vertical y hacia abajo.

Resp. $\delta = -\frac{Pa^2}{EI} \left(b + \frac{a}{3}\right)$

696. En la figura P-696, calcular el valor de P para el cual la deflexión debajo de esta fuerza sea nula.

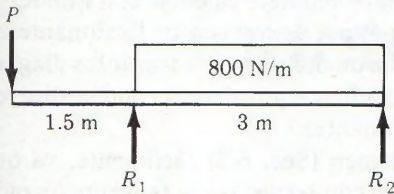


Figura P-696.

Resp. $P = 400 \text{ N}$

697. Dos vigas idénticas, conectadas en sus extremos, soportan una carga repartida sobre

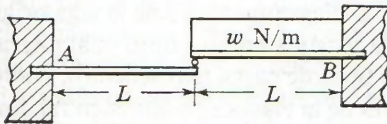


Figura P-697.

una de ellas, como se indica en la figura P-697. Determinar los momentos en el empotramiento.

Resp. $M_A = -3wL^2/16$; $M_B = -5wL^2/16$

698. La viga de la figura P-698 está apoyada en su extremo izquierdo en un resorte de constante $k = 60 \text{ kN/m}$. En la viga, $E = 10 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ e $I = 60 \times 10^6 \text{ mm}^4$. Calcular la deflexión en el extremo.

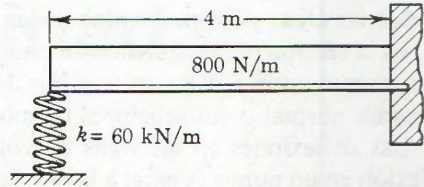


Figura P-698.

Resp. $\delta = 13.6 \text{ mm}$

699. Dos vigas de madera están colocadas en ángulo recto y en contacto en su punto medio. La viga superior A tiene una sección de 50 mm de ancho por 200 mm de alto y un claro de 3 m. Está simplemente apoyada en sus extremos. La viga inferior B tiene una sección de 80 mm de ancho por 200 mm de altura y está simplemente apoyada sobre un claro de 4 m. En el cruce, el conjunto soporta una carga de 10 kN. Determinar el esfuerzo normal máximo en cada viga.

RESUMEN

Partiendo de la relación $1/\rho = M/EI$ (sección 5-2) se estudian dos métodos para la determinación de pendientes y ordenadas de la elástica. El primero, el método de la doble integración, es fundamentalmente analítico. Para determinar la deformación en un punto dado hay que obtener primero la ecuación completa de la elástica y de las pendientes. El procedimiento es sencillo partiendo de la ecuación general de momentos, como se explica en la sección 6-2. Las constantes de integración se anulan si se considera el origen del sistema de ejes en un punto en que la pendiente y la deflexión sean nulas, como en un empotramiento, o en el centro de una viga simétricamente cargada.

El método del área de momentos es más directo, especialmente cuando lo que se trata es de calcular la deflexión o la pendiente en un punto dado. Los dos teoremas fundamentales de este método, desarrollado en la sección 6-3, son:

$$\theta_{AB} = \frac{1}{EI} (\text{área})_{AB} \quad (6-4)$$

y

$$t_{B/A} = \frac{1}{EI} (\text{área})_{BA} \cdot \bar{x}_B \quad (6-5)$$

La desviación tangencial en cualquier punto es positiva si éste queda por encima de la tangente de referencia, desde la que se mide. Un valor positivo en la desviación angular o variación de pendiente indica que la tangente en el punto de la derecha ha girado en sentido contrario al del reloj respecto de la tangente en el punto izquierdo.

La aplicación de los teoremas del área de momentos requiere calcular con rapidez y seguridad las áreas y los momentos de las áreas del diagrama de momentos flexionantes. Por ello, en la sección 6-4 y siguientes se estudia y desarrolla un método para trazar los diagramas de momentos por partes, en función de vigas en voladizo equivalentes, que sustituyen al diagrama normal o convencional de momentos flexionantes.

Las deflexiones en las vigas en voladizo se obtienen (Sec. 6-5) fácilmente, ya que la deflexión en un punto es igual a la desviación del punto con respecto a la tangente trazada en el empotramiento.

Las deflexiones en vigas simplemente apoyadas se determinan trazando una tangente de referencia en uno cualquiera de los apoyos. El procedimiento completo se resume en los cuatro puntos que expone la sección 6-6. Como las deflexiones en el centro del claro son prácticamente equivalentes a las deflexiones máximas, es muy útil disponer de un método rápido y sencillo para calcular aquéllas; en la sección 6-7 se desarrolla este método.

El método de la viga conjugada (Sec. 6-8) aplica las definiciones de fuerza cortante y momento flexionante a una viga con una carga ficticia, el diagrama M/EI de la viga original, a la determinación de la pendiente y la ordenada de la elástica en un punto cualquiera.

Cuando las cargas en una viga son combinación de tipos de carga más sencillos, como los indicados en la Tabla 6-2, las ordenadas y las pendientes de la elástica se obtienen fácilmente por superposición de los resultados que figuran en dicha tabla. En la sección 6-9 se dan amplios detalles sobre este método de superposición.

7

vigas estáticamente indeterminadas

7-1. INTRODUCCIÓN

Al estudiar el esfuerzo simple y la torsión se observó que en los problemas estáticamente indeterminados, en los que las ecuaciones de equilibrio estático son insuficientes, es preciso añadir otras ecuaciones de relación entre las deformaciones elásticas. De la misma manera, en el estudio de las vigas estáticamente indeterminadas o hiperestáticas hay que añadir a las ecuaciones de la estática otras relaciones adicionales basadas en la deformación de las vigas. Dichas relaciones se obtienen a partir del estudio de la elástica de una viga estáticamente determinada que se hizo en el capítulo anterior.

Se examinan tres procedimientos: (1) doble integración, (2) método de superposición, que utiliza las soluciones de las Tablas 6-2 y 7-1, y (3) método del área de momentos, en el que se trabaja directamente con la forma de la elástica. Como veremos, a veces es preciso hallar la ordenada en un cierto punto, otras veces es una relación entre las pendientes entre dos puntos, y en ciertos casos ambas cosas.

7-2. APOYOS REDUNDANTES

Una viga en voladizo está soportada por dos reacciones, la vertical o fuerza cortante resistente y el momento resistente o de empotramiento, como se indica en la figura 7-1a. Como estos dos elementos de reacción se calculan mediante las ecuaciones de la estática, $\Sigma Y = 0$ y $\Sigma M = 0$, la viga en voladizo es estáticamente determinada. Ahora bien, si se coloca otro apoyo en cualquier punto, como en la figura 7-1b, se introduce una reacción adicional, y como no se aumenta el número de ecuaciones de la estática, la viga tiene un apoyo redundante, es decir, un exceso de restricciones.

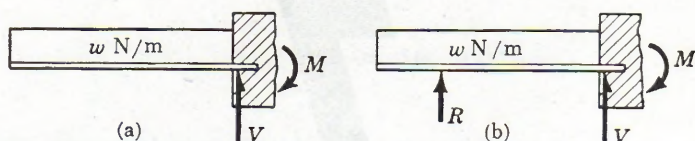


Figura 7-1. Vigas estáticamente determinada e indeterminada.

Dicho de otra manera, para cada valor arbitrario de R se pueden calcular unos valores de M y V que satisfacen las condiciones de equilibrio estático, por lo que la determinación de los valores apropiados de la terna R , V , M requiere añadir una condición más a las ecuaciones de equilibrio estático. En estos casos se suele tomar como condición que la deflexión en el apoyo redundante, R por ejemplo, sea nula o tenga cualquier otro valor. Otras veces, y considerando como restricción redundante el momento de empotramiento, por ejemplo al aplicar el método de superposición, se pone como condición que la pendiente de la elástica en este punto sea nula.

Una viga empotrada en sus dos extremos, como la representada en la figura 7-2, tiene cuatro elementos de reacción, pero como sólo se dispone de dos ecuaciones de la estática $\Sigma Y = 0$ y $\Sigma M = 0$, la viga tiene dos restricciones redundantes. A veces se toman como redundantes o hiperestáticas las dos del mismo extremo, es decir, V_A y M_A . Otras veces (véase la Sec. 7-5), los dos momentos de empotramiento.

7-3. APLICACIÓN DE LOS MÉTODOS DE LA DOBLE INTEGRACIÓN Y DE LA SUPERPOSICIÓN

El método de la doble integración se aplica exactamente igual que en las vigas estáticamente determinadas, sólo que allí todas las fuerzas eran conocidas y aquí intervendrán además unas desconocidas, las reacciones redundantes. Al aplicarlo, consideremos el origen de ejes, con preferencia, en un extremo empotrado, con lo que las dos constantes de integración que aparecen serán nulas. Ahora bien, en la ecuación general de momentos y en las obtenidas al integrar ésta sucesivamente aparecen, además, los valores desconocidos de las reacciones hiperestáticas. Para determinar estos valores se han de aplicar a la ecuación de la elástica o de la pendiente las condiciones existentes en el otro apoyo. En una viga estáticamente determinada existen siempre dos condiciones de sujeción, ordenadas o pendientes, que permiten deducir las dos constantes de integración, y cada restricción sobrante introduce en las ecuaciones una incógnita, pero añade también una condición más a la elástica, por lo que el sistema será siempre determinado.

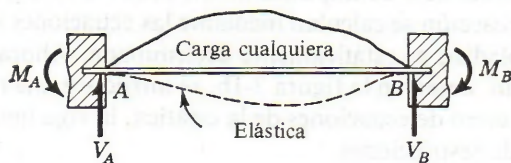
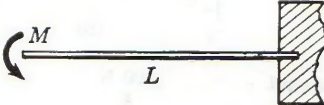
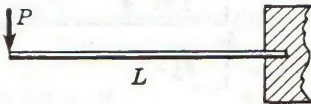
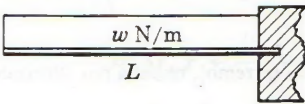
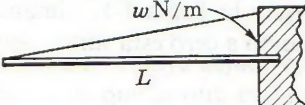


Figura 7-2. Viga perfectamente empotrada en sus extremos.

TABLA 7-1. Pendiente y deflexión en el extremo libre.

$$EI\theta = \frac{ML}{n+1}; EI\delta = \frac{ML^2}{n+2}; M = \text{Momento en el empotramiento}$$

CARGA	n	$EI\theta$	$EI\delta$
	0	$\frac{ML}{1}$	$\frac{ML^2}{2}$
	1	$\frac{ML}{2}$	$\frac{ML^2}{3}$
	2	$\frac{ML}{3}$	$\frac{ML^2}{4}$
	3	$\frac{ML}{4}$	$\frac{ML^2}{5}$

El método de superposición se aplica utilizando los resultados de los distintos casos de carga que aparecen en la Tabla 6-2, aunque conviene utilizar el resumen dado en la Tabla 7-1, en que aparecen los valores de la pendiente y la deflexión en el extremo libre de una viga en voladizo sometida a varios tipos de carga en función del momento M en su extremo empotrado. Obsérvese que los coeficientes son exactamente los mismos que los encontrados para el área y la abscisa del centro de gravedad en la Tabla 6-1. Es fácil comprobar que las soluciones generales son de la forma

$$EI\theta = ML/(n + 1) \text{ y } EI\delta = ML^2/(n + 2),$$

siendo n el grado de la curva de momento flexionante.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

701. Determinar las reacciones en la viga de la figura 7-3a por los dos métodos: (1) método de superposición, considerando a R_A como reacción sobrante, y (2) método de la doble integración.

Solución: Método de superposición. Las condiciones de apoyo de la viga se pueden reproducir superponiendo los efectos de los dos estados de carga que se aplican a la ménsula de las figuras 7-3b y 7-3c, con la condición de que la deflexión total en A sea nula, es decir, $\delta_1 = \delta_2 + \delta_3$. Obsérvese que δ_2 es la deflexión bajo la carga de 400 N y δ_3 la deflexión producida por el giro de la sección en este punto en un ángulo θ , que produce la inclinación del último seg-

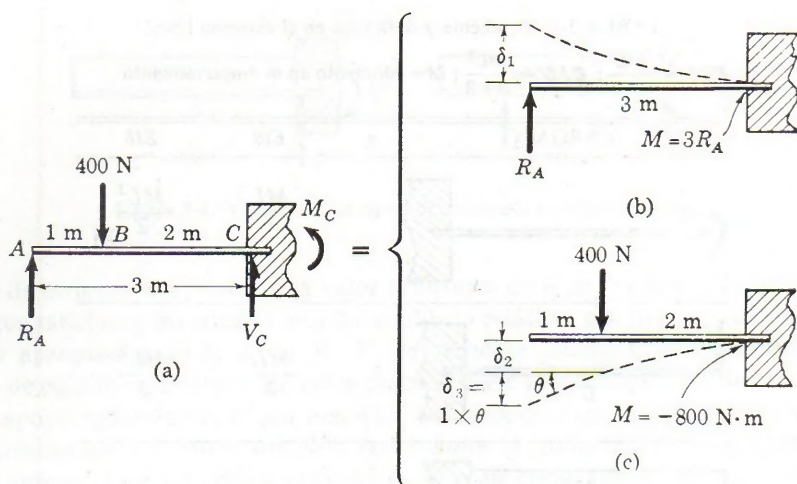


Figura 7-3. Viga empotrada (con apoyo en un extremo), resuelta por superposición.

mento de 1 m de longitud de la viga (Fig. c). Según la Tabla 7-1, sumando las deflexiones producidas por cada carga en el extremo, e igualando a cero esta suma, como lo es en la viga original, se tiene:

$$[\Sigma EI\delta = 0] \quad \frac{(3R_A)(3)^2}{3} - \frac{(800)(2)^2}{3} - 1 \times \frac{(800)(2)}{2} = 0$$

de donde

$$R_A = 207 \text{ N}$$

Conocida R_A , la suma de fuerzas verticales determina V_C .

$$[\Sigma Y = 0] \quad V_C + 207 - 400 = 0 \quad V_C = 193 \text{ N}$$

Por definición de momento flexionante en C, que es equivalente a $\Sigma M_C = 0$ pero más fácil de aplicar, se tiene:

$$[M = (\Sigma M)_{izq}] \quad M_C = 3(207) - 2(400) = -179 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Otro método es considerar a M_C como reacción hiperestática y sustituir la viga por una simplemente apoyada con los dos estados de carga de los casos 7 y 11 de la Tabla 6-2, y determinar el valor de M_C por la condición de que la pendiente total en el apoyo derecho sea nula, como en la viga original. Compruébese que se obtiene el mismo resultado.

Método de la doble integración. Volviendo a la figura 7-3a, consideremos como origen de ejes coordenados el extremo empotrado C. Por conveniencia de cálculo se da la vuelta a la viga, de manera que el extremo empotrado quede a la izquierda, como en la figura 7-4. En este extremo fijo, la deflexión y la pendiente son nulas, por lo que las dos constantes de integración C_1 y C_2 , que físicamente representan la tangente y la deflexión en el origen, tam-

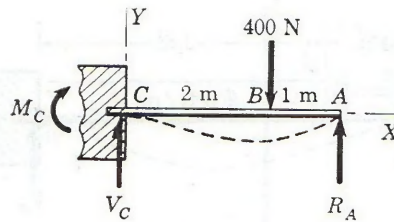


Figura 7-4.

bién lo serán. Escribiendo la ecuación diferencial de la elástica en función de la ecuación general de momentos e integrando dos veces se obtiene:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M_C + V_C x - 400 \langle x - 2 \rangle \quad (a)$$

$$EI \frac{dy}{dx} = M_C x + \frac{V_C x^2}{2} - 200 \langle x - 2 \rangle^2 + C_1 = 0 \quad (b)$$

$$EI y = \frac{M_C x^2}{2} + \frac{V_C x^3}{6} - \frac{200}{3} \langle x - 2 \rangle^3 + C_2 = 0 \quad (c)$$

Obsérvese que aunque se haya dejado en la ecuación V_C y M_C como incógnitas, sólo una de ellas es redundante, ya que la otra es función de la primera según el equilibrio estático. Como ya se han aplicado las dos condiciones en C, se aplican ahora las condiciones en A, es decir, que el momento sea cero (ecuación de la estática), y que la flecha también sea nula (ecuación de deformación). Así, pues, poniendo en (a) y (c) $x = 3$ resulta:

$$\begin{aligned} M_C + 3V_C - 400(1) &= 0 \\ \frac{M_C}{2}(3)^2 + \frac{V_C}{6}(3)^3 - \frac{200}{3}(1)^3 &= 0 \end{aligned}$$

De este sistema se obtiene, como antes,

$$V_C = 193 \text{ N} \quad \text{y} \quad M_C = -179 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Resp.

Un aspecto importante de este procedimiento, aplicado precisamente en esta forma, es que si la viga hubiera sido doblemente empotrada servirían las ecuaciones (a), (b) y (c); únicamente se tendrían que variar las condiciones en A, ya que entonces lo nulo sería la pendiente y la deflexión, es decir, (b) y (c) para $x = 3$. Sustituyendo y resolviendo el sistema, se obtendrían $V_C = 104 \text{ N}$ y $M_C = -89 \text{ N} \cdot \text{m}$.

702. Una viga de 4 m de longitud, doblemente empotrada, soporta una carga uniformemente distribuida sobre parte de su longitud, como se indica en la figura 7-5. Aplicar el método de la doble integración para calcular las reacciones y comprobar la solución que se obtiene aplicando el método de superposición.

Solución: Aunque por la forma que va a tomar la elástica se deduce que el momento en A ha de ser negativo, se trazará como positivo, para ver de qué manera la solución proporciona el valor y el signo del mismo.

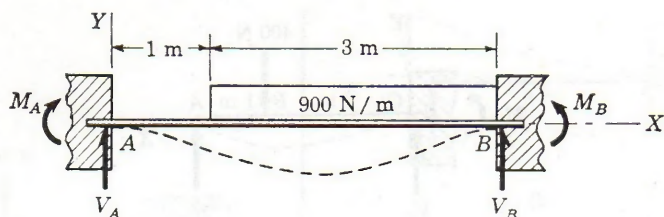


Figura 7-5.

La forma de la elástica, tal como se ha dibujado en la figura 7-5, indica que la pendiente y la deflexión en A son nulas. Por tanto, considerando el origen de ejes en este punto, las constantes C_1 y C_2 son nulas. Escribiendo la ecuación diferencial de la elástica en función de la ecuación general de momentos, e integrando dos veces, se tiene:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M_A + V_A x - \frac{900}{2} \langle x - 1 \rangle^2 \quad (a)$$

$$EI \frac{dy}{dx} = M_A x + \frac{V_A x^2}{2} - 150 \langle x - 1 \rangle^3 + C_1 = 0 \quad (b)$$

$$EI y = \frac{M_A x^2}{2} + \frac{V_A x^3}{6} - \frac{150}{4} \langle x - 1 \rangle^4 + C_2 = 0 \quad (c)$$

Ahora existen dos reacciones desconocidas o sobrantes en las ecuaciones de la elástica y de la pendiente, V_A y M_A . Para determinarlas se aplican otras dos condiciones de deformación. Como se observa en B, o sea para $x = 4$, la deflexión y la pendiente también son nulas, por lo que sustituyendo en las ecuaciones (b) y (c) se obtiene:

$$4M_A + (4)^2 \frac{V_A}{2} - 150(3)^3 = 0 \quad (d)$$

$$(4)^2 \frac{M_A}{2} + (4)^3 \frac{V_A}{6} - \frac{150}{4} (3)^4 = 0 \quad (e)$$

cuya solución es

$$V_A = 949 \text{ N} \quad \text{y} \quad M_A = -886 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Resp.

El signo negativo de M_A indica que, efectivamente tiene sentido opuesto al que se supuso. Como el momento flexionante en este punto es negativo, con este proceder no se comete error, si luego se ha de utilizar M_A en algún otro cálculo.

Determinados V_A y M_A , se aplican las condiciones de equilibrio estático al diagrama de cuerpo libre de la figura 7-5 y se obtienen las reacciones en B. La suma de las componentes verticales de las fuerzas proporciona

$$[\Sigma Y = 0] \quad V_B + 949 - 900(3) = 0 \quad V_B = 1750 \text{ N}$$

Resp.

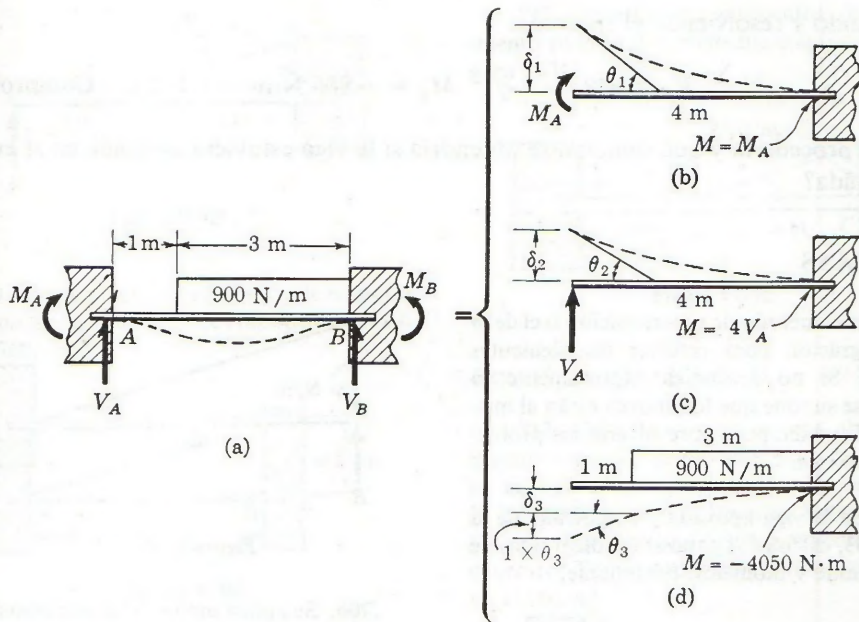


Figura 7-6. Solución por el método de superposición.

y en cuanto a M_B se puede calcular por $\Sigma M_B = 0$, pero es preferible, y así se evita cualquier confusión en los signos, aplicar la definición de momento flexionante:

$$[M = (\Sigma M)_{izq}] \quad M_B = 4V_A + M_A - (900 \times 3)\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= 4(949) - 886 - 4050$$

$$= -1140 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Resp.

Este procedimiento de solución puede adaptarse al caso de que la viga estuviera apoyada en B en lugar de estar empotrada, sin más que cambiar las condiciones impuestas en B por las de deflexión y momento nulos. Se tendría entonces que igualar a cero las ecuaciones (a) y (c) para $x = 4$, y se obtendrían los valores de V_A y M_A correspondientes al apoyo en B .

Para aplicar el método de superposición, se sustituye la viga doblemente empotrada por la viga en voladizo que aparece en las figuras 7-6b, c y d, con tres distintos estados de carga, y donde V_A y M_A son desconocidos y se aplica a la deformación total producida por estos tres estados de carga conjuntamente, las condiciones de sujeción que tenía la viga original, figura 7-6a, es decir, que la deflexión y la pendiente sean nulas en A . Por tanto, tal como se ha dibujado, $\theta_1 + \theta_2 - \theta_3 = 0$ y $\delta_1 + \delta_2 - \delta_3 - (1 \times \theta_3) = 0$. Aplicando ahora a las deflexiones y ángulos parciales los valores de la Tabla 7-1 se obtiene:

$$[\Sigma EI\theta = 0] \quad M_A(4) + \frac{(4V_A)(4)}{2} - \frac{(4050)(3)}{3} = 0$$

y

$$[\Sigma EI\delta = 0] \quad \frac{M_A(4)^2}{2} + \frac{(4V_A)(4)^2}{3} - \frac{(4050)(3)^2}{4} - 1 \times \frac{(4050)(3)}{3} = 0$$

Simplificando y resolviendo el sistema,

$$V_A = 949 \text{ N} \quad \text{y} \quad M_A = -886 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Comprobación

¿Cómo se procedería y qué solución se obtendría si la viga estuviera apoyada en *A* en lugar de empotrada?

PROBLEMAS

Aplicar el método de superposición o el de la doble integración para resolver los siguientes problemas. Si no se indica expresamente lo contrario, se supone que los apoyos están al mismo nivel. También pueden resolverse los problemas de la sección 7-4.

703. En la viga apoyada y empotrada de la figura P-703, calcular *R* y trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.

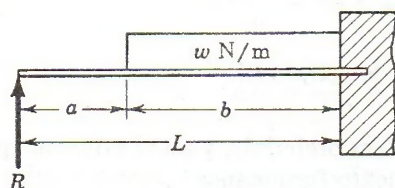


Figura P-703.

Resp. $R = (wb^3/8L^3)(4L - b)$

704. Calcular el valor de *R* y trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante en la viga apoyada y empotrada de la figura P-704.

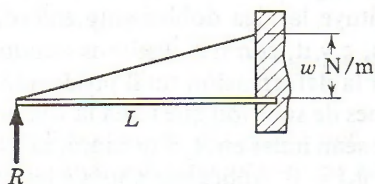


Figura P-704.

Resp. $R = wL/10$

705. En la viga de la figura P-705, determinar la reacción *R* en el apoyo redundante y trazar los diagramas de cortante y de momento.

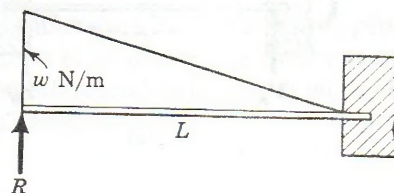


Figura P-705.

706. Se aplica un par *M* al extremo articulado de la viga de la figura P-706. Calcular la reacción en este extremo y el momento de empotramiento.

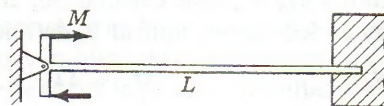


Figura P-706.

Resp. $R = 3M/2L$

707. Determinar la reacción *R* y trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante en la viga estáticamente indeterminada de la figura P-707.

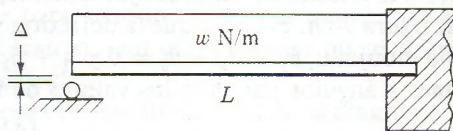


Figura P-707.

708. Calcular la reacción *R* en la viga de la figura P-708.

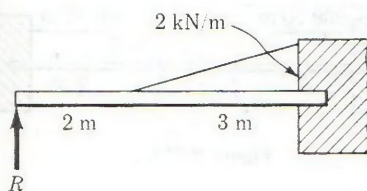


Figura P-708.

709. Determinar los momentos de empotramiento en la viga doblemente empotrada de la figura P-709.

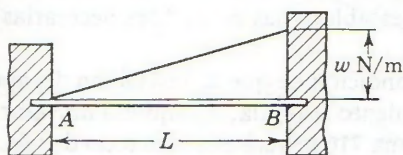


Figura P-709.

Resp. $M_A = -wL^2/30$; $M_B = -wL^2/20$

710. Calcular los momentos de empotramiento en la viga de la figura P-710.

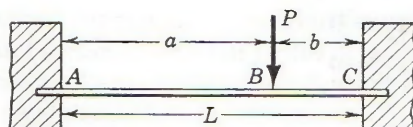


Figura P-710.

Resp. $M_A = -Pab^2/L^2$; $M_C = -Pa^2b/L^2$

711. En la viga mostrada en la figura P-711 hay inicialmente un espacio libre Δ entre el extremo izquierdo y el rodillo indicado. Calcular la reacción en este apoyo después de aplicar la carga w uniformemente distribuida.

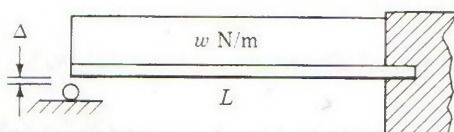


Figura P-711.

712. Calcular los momentos de empotramiento en la viga doblemente empotrada de la figura P-712.

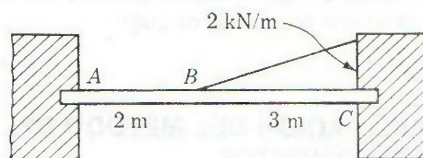


Figura P-712.

Resp. $M_A = -575 \text{ N} \cdot \text{m}$; $M_C = -1525 \text{ N} \cdot \text{m}$

713. Calcular los momentos de empotramiento y el valor de $EI\delta$ en el centro del claro para la viga doblemente empotrada de la figura P-713. Indicación: Por simetría, las reacciones en los extremos son iguales y la pendiente es nula en el centro. Tomar como hiperestático el momento en el centro.

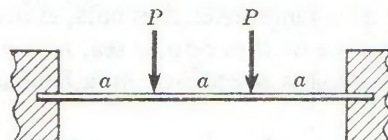


Figura P-713.

Resp. $M = -(2/3)Pa$; $EI\delta = (5/24)Pa^3$

714. En la viga doblemente empotrada de la figura P-714 calcular los momentos de empotramiento y la deflexión máxima. Indicación: Emplear vigas en voladizo equivalentes con el empotramiento en el centro y voladas hacia los extremos.

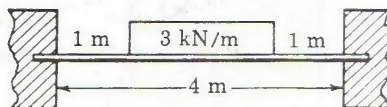


Figura P-714.

Resp. $M = -2750 \text{ N} \cdot \text{m}$

715. Calcular los momentos de empotramiento y la deflexión máxima en la viga doble-

mente empotrada de la figura P-715. *Indicación:* Considerar como magnitudes hiperestáticas la fuerza cortante y el momento flexionante en el centro. Obsérvese que la fuerza cortante que actúa en el centro es nula. ¿Por qué?

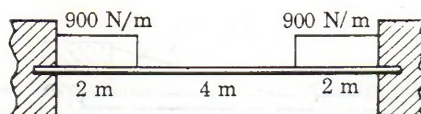


Figura P-715.

7.4. APLICACIÓN DEL MÉTODO DEL ÁREA DE MOMENTOS

El método de superposición que se acaba de describir requiere el empleo de la Tabla 6-2 o de la Tabla 7-1, que dan los valores de las deflexiones y pendientes para distintos tipos de cargas y vigas. En lugar de aplicar estas tablas, o por que no se tengan a mano, es preferible a veces aplicar los teoremas del área de momentos para establecer las ecuaciones necesarias para la determinación de las magnitudes hiperestáticas.

En una viga empotrada y apoyada, se aplica la condición de que la desviación del apoyo con respecto a la tangente a la elástica en el empotramiento sea nula, o adquiera un valor conocido si el apoyo no está al mismo nivel. En el problema 716 se verá esto con todo detalle. En las vigas doblemente empotradas, como se observa en la figura 7-7, dado que las tangentes a la elástica en los extremos son horizontales, la variación total de la pendiente entre los extremos es nula, o sea $\theta_{AB} = 0$. Además, si los extremos están al mismo nivel, la desviación de B respecto de la tangente en A es nula, es decir, $t_{B/A} = 0$. También, la desviación de A respecto de la tangente en B es cero, o sea, $t_{A/B} = 0$. Aplicando los teoremas del área de momentos estas condiciones se escriben en la forma:

$$EI\theta_{AB} = (\text{área})_{AB} = 0 \quad (a)$$

$$EI t_{B/A} = (\text{área})_{BA} \cdot \bar{x}_B = 0 \quad (b)$$

$$EI t_{A/B} = (\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A = 0 \quad (c)$$

Las tres ecuaciones no son independientes; dos cualesquiera de ellas, junto con las ecuaciones de la estática, determinan las cuatro reacciones. Como norma práctica, lo mejor es utilizar la ecuación (a) y una de las otras, según lo que convenga por facilidad de cálculo. En el problema 717 se verá cómo elegir una u otra.

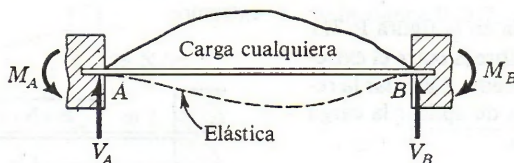


Figura 7-7.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

716. La figura 7-8 representa una viga apoyada y empotrada que soporta una carga uniformemente repartida de w N/m sobre toda su longitud. El apoyo izquierdo es indefor-

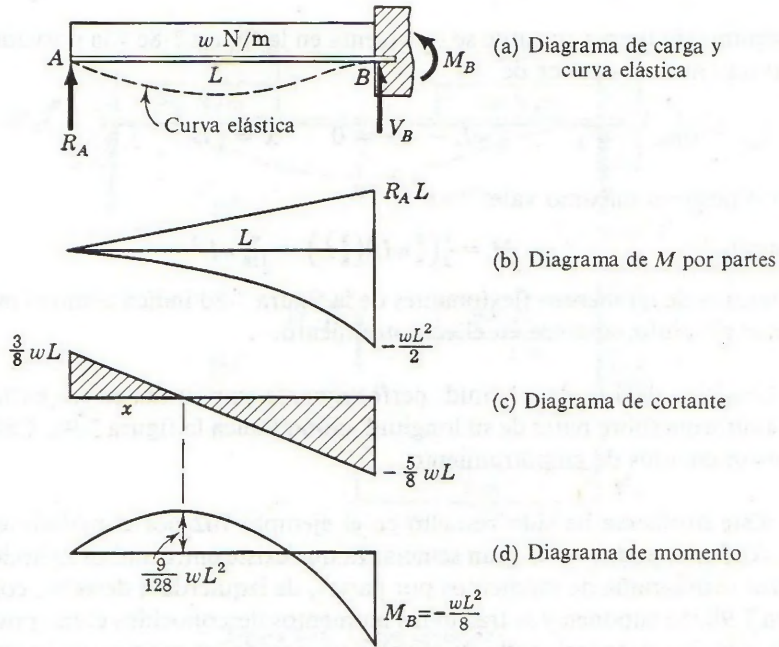


Figura 7-8. Viga empotrada y apoyada, resuelta por el método del área del diagrama de momentos.

mable. Calcular las reacciones y trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.

Solución: Suponiendo que el empotramiento es perfecto, la tangente a la elástica en B es horizontal y pasa por A . Por tanto, la desviación de A con respecto a la tangente en B es nula. Expresando esta condición en función del diagrama de momentos por partes de la figura 7-8b se obtiene:

$$[EI t_{A/B} = (\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A = 0] \quad \frac{(L)(R_A L)}{2} \left(\frac{2}{3} L \right) - \frac{(L)}{3} \left(\frac{wL^2}{2} \right) \left(\frac{3}{4} L \right) = 0$$

Por tanto,

$$R_A = \frac{3}{8} wL$$

Para determinar la reacción vertical en el empotramiento se tiene:

$$[\Sigma Y = 0] \quad R_A + V - wL = 0$$

Sustituyendo R_A por su valor,

$$V = wL - \frac{3}{8} wL = \frac{5}{8} wL$$

Por definición de momento flexionante en B :

$$[M = (\Sigma M)_{izq}] \quad M_B = R_A L - \frac{wL^2}{2} = \left(\frac{3}{8} wL \right) L - \frac{wL^2}{2} \quad M_B = -\frac{wL^2}{8}$$

El diagrama de fuerza cortante se representa en la figura 7-8c y la posición del punto de fuerza cortante nula se deduce de

$$[V = (\Sigma Y)_{izq} = 0] \quad \frac{3}{8}wL - wx = 0 \quad x = \frac{3}{8}L$$

El momento positivo máximo vale

$$[\Delta M = (\text{área})_V] \quad M = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}wL\right)\left(\frac{3}{8}L\right) = \frac{9}{128}wL^2$$

El diagrama de momentos flexionantes de la figura 7-8d indica cómo el momento máximo, en valor absoluto, aparece en el empotramiento.

717. Una viga de 4 m de longitud, perfectamente empotrada en sus extremos, soporta una carga uniforme sobre parte de su longitud, como indica la figura 7-9a. Calcular las reacciones y los momentos de empotramiento.

Solución: Este problema ha sido resuelto en el ejemplo 702 por el método de la doble integración. Ahora se podrá ver la gran semejanza que existe entre ambos métodos. Se comienza por trazar el diagrama de momentos por partes, de izquierda a derecha, como se observa en la figura 7-9b. Se suponen y se trazan los momentos desconocidos como positivos. De esta manera, la solución proporcionada da el valor y signo de los momentos de empotramiento.

En la elástica de la figura 7-9a se observa que la variación total de pendiente entre A y B es nula, por lo que aplicando el Teorema I de las áreas de momentos se tiene:

$$[EI\theta_{AB} = (\text{área})_{AB} = 0] \quad \frac{4(4V_A)}{2} + 4M_A - \frac{3(4050)}{3} = 0 \quad (a)$$

La desviación de B con respecto a la tangente en A es nula y, por tanto, por el Teorema II de las áreas de momentos:

$$[EI t_{B/A} = (\text{área})_{BA} \cdot \bar{x}_B = 0] \quad \frac{4(4V_A)}{2} \left(\frac{4}{3}\right) + 4M_A \left(\frac{4}{2}\right) - \frac{3(4050)}{3} \left(\frac{3}{4}\right) = 0 \quad (b)$$

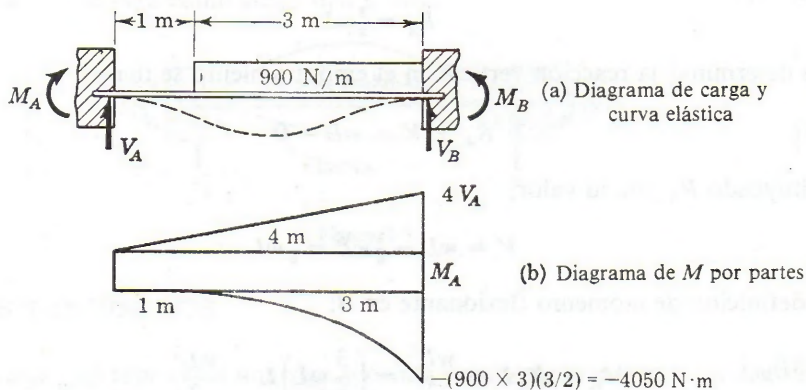


Figura 7-9. Viga doblemente empotrada.

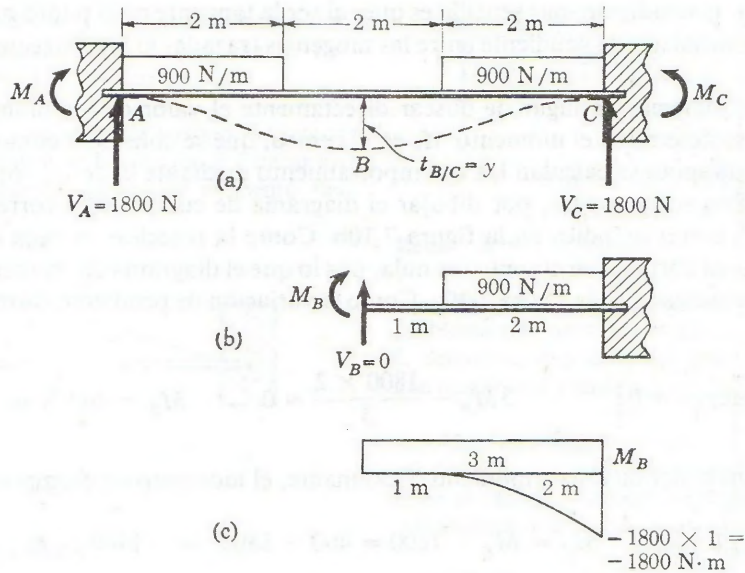


Figura 7-10. Carga simétrica.

Resolviendo el sistema (a) y (b) se tiene finalmente

$$V_A = 949 \text{ N} \quad \text{y} \quad M_A = -886 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Resp.

El signo negativo de M_A confirma que su sentido es opuesto al dibujado, lo que ya se sabía, pero de esta manera no puede haber confusión o error en los signos en una posterior utilización.

La desviación de A con respecto a la tangente en B también es nula, por lo que podíamos haber utilizado $EIt_{A/B} = (\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A = 0$. Ahora bien, observando el diagrama de momentos por partes de la figura 7-9b se deduce que es más sencillo el cálculo tomando momentos de las áreas respecto de B, razón por la cual se ha empleado $EIt_{B/A} = 0$.

Comparando el procedimiento con la solución mediante la doble integración se desprende que las ecuaciones (a) y (e) obtenidas allí son idénticas a las (a) y (b) de este método. Por otra parte, comparando con el método de superposición se observa que la segunda ecuación allí obtenida equivale a $EIt_{A/B} = 0$, que se podía haber empleado aquí en lugar de $EIt_{B/A} = 0$.

Determinados V_A y M_A se calculan las demás reacciones de la misma manera que por los otros procedimientos, o sea, aplicando las ecuaciones de la elástica, por lo que no es preciso repetir el cálculo.

718. Calcular los momentos de empotramiento y la deflexión máxima en la viga simétricamente cargada y doblemente empotrada de la figura 7-10a.

Solución: Debido a la simetría, las reacciones verticales son iguales a la mitad de la carga total aplicada. Los momentos de empotramiento también son iguales, pero desconocidos. Para

determinarlos, la condición más sencilla es que, al ser la tangente en el punto medio horizontal, es nula la variación de pendiente entre las tangentes trazadas en un extremo y en el punto medio.

En este problema, en lugar de buscar directamente el valor de los momentos de empotramiento se determina el momento M_B en el centro, que se considera como incógnita hiperestática, y después se calculan los de empotramiento mediante la definición de momento flexionante. Empecemos pues, por dibujar el diagrama de cuerpo libre correspondiente al segmento BC , como se indica en la figura 7-10b. Como la reacción en cada extremo es de 1800 N, la fuerza cortante en el centro es nula, por lo que el diagrama de momento por partes tiene la forma indicada en la figura 7-10c. Como la variación de pendiente entre B y C es nula se tiene:

$$[EI\theta_{BC} = (\text{área})_{BC} = 0] \quad 3M_B - \frac{1800 \times 2}{3} = 0 \quad M_B = 400 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Aplicando la definición de momento flexionante, el momento en el empotramiento vale

$$[M_C = (\Sigma M)_{izq}] \quad M_C = M_B - 1800 = 400 - 1800 = -1400 \text{ N}\cdot\text{m} \quad \text{Resp.}$$

La ordenada máxima se produce en el centro del claro y es numéricamente igual a la desviación de B con respecto a la tangente trazada en C . Con el valor ya conocido de $M_B = 400 \text{ N}\cdot\text{m}$, resulta

$$\begin{aligned} [EI t_{B/C} = (\text{área})_{BC} \cdot \bar{x}_B] \\ EI y = (400 \times 3) \left(\frac{3}{2} \right) - \left(\frac{1800 \times 2}{3} \right) \left(1 + \frac{3}{4} \times 2 \right) \\ = -1200 \text{ N}\cdot\text{m}^3 \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

El signo menos indica que la deflexión y tiene sentido hacia abajo.

PROBLEMAS

A menos que se diga lo contrario, se supone que los apoyos y empotramientos son indeformables. Pueden resolverse también, por el método del área de momentos, los problemas de la sección 7-3.

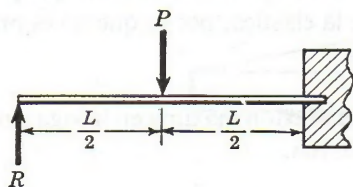


Figura P-719.

719. En la viga de la figura P-719 determinar la reacción R y el valor de $EI\delta$ en el centro.

$$\text{Resp. } R = (5/16)P; EI\delta = (7/768)PL^3$$

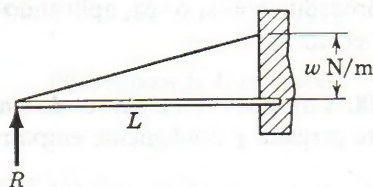


Figura P-720.

720. Calcular la reacción R y trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flector en la viga de la figura P-720.

721. En la viga apoyada y empotrada de la figura P-721 determinar la reacción R y trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flector.

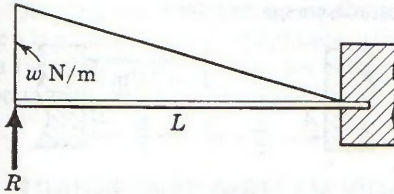


Figura P-721.

Resp. $R = (11/40)wL$

722. En la viga de la figura P-722 calcular la reacción R en el extremo apoyado y el momento de empotramiento. Comprobar el resultado obtenido haciendo $b = L$ y compararlo con el resultado del problema 706.

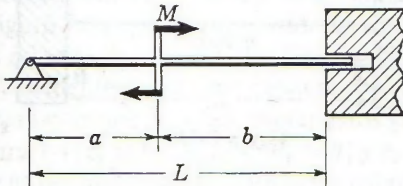


Figura P-722.

723. Hallar la reacción R y el momento de empotramiento en la viga de la figura P-723.

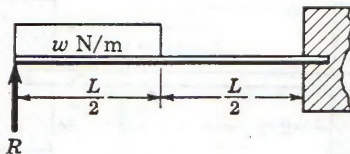


Figura P-723.

724. El empotramiento de la viga de la figura P-724 no es perfecto, de manera que el aplicar la carga uniforme w permite un cierto giro $wL^3/48EI$ de la sección empotrada. Si los apoyos están al mismo nivel, determinar R .

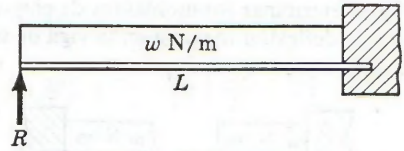


Figura P-724 y P-725.

Resp. $R = (7/16)wL$

725. Si el apoyo izquierdo de la viga del problema anterior sufre un asentamiento de valor δ , demostrar que la reacción en él experimenta una disminución igual a $3EI\delta/L^3$.

726. Una viga de longitud L , empotrada en sus dos extremos, soporta una carga concentrada P en el centro. Calcular los momentos de empotramiento y la deflexión máxima.

727. Repetir el problema 726 si en lugar de la carga concentrada se aplica una carga uniforme de w N/m sobre toda su longitud.

Resp. $M = -wL^2/12$; $EI\delta = wL^4/384$

728. Determinar los momentos de empotramiento y la deflexión en el centro en la viga doblemente empotrada de la figura P-728.

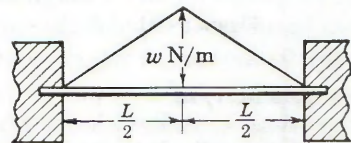


Figura P-728.

729. En la viga doblemente empotrada de la figura P-729 calcular los momentos de empotramiento y el máximo valor de $EI\delta$.

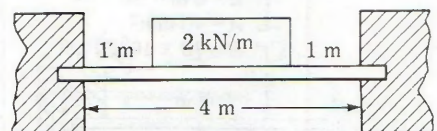


Figura P-729.

Resp. $M = -1830 \text{ N} \cdot \text{m}$;

$EI\delta = 1080 \text{ N} \cdot \text{m}^3$

730. Determinar los momentos de empotramiento y la deflexión máxima en la viga de la figura P-730.

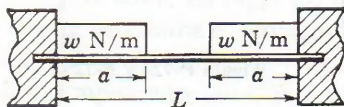


Figura P-730.

Resp. $M = -(wa^2/6L)(3L - 2a);$
 $EIy = -(wa^3/24)(L - a)$

731. La viga mostrada en la figura P-731 está conectada a una barra vertical. Si la viga se mantiene horizontal a una cierta temperatura determinar el incremento del esfuerzo en la barra si la temperatura en éste se abate 50°C . Tanto la viga como la barra están construidas de acero con $E = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$. Para la viga use $I = 60 \times 10^6 \text{ mm}^4$.

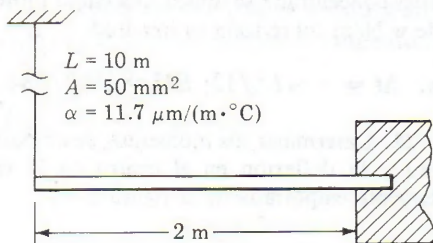


Figura P-731.

Resp. $\sigma = 95.8 \text{ MN/m}^2$

732. El punto medio de la viga de acero de la figura P-732 está conectado a la barra vertical de aluminio. Determinar el valor máximo de P si el esfuerzo en la barra no ha de ser mayor que 150 MN/m^2 .

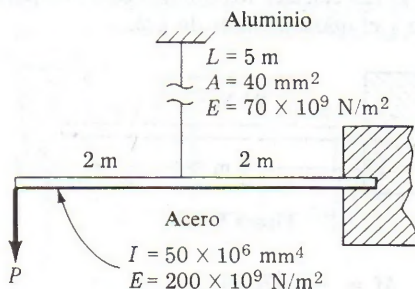


Figura P-732 y P-733.

733. Si se reemplaza la carga P del problema 732 por un par M en sentido contrario al del reloj, determinar el valor máximo de M si el esfuerzo en la barra vertical no ha de ser mayor que 100 MN/m^2 .

Resp. $M = 41.1 \text{ kN}\cdot\text{m}$

734. Determinar los momentos de empotramiento en la viga de la figura P-734 perfectamente empotrada en sus extremos.

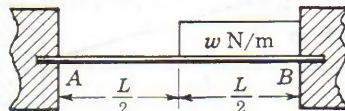


Figura P-734.

Resp. $M_A = -(5/192)wL^2;$
 $M_B = -(11/192)wL^2$

735. La viga de la figura P-735 está perfectamente empotrada en A , pero sólo parcialmente empotrada en B , donde la pendiente vale $wL^3/48EI$, dirigida hacia arriba a la derecha. Calcular los momentos de empotramiento.

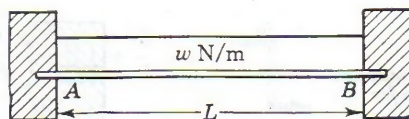


Figura P-735.

736. Para la viga mostrada en la figura P-736 calcular los valores de la fuerza cortante y del momento flexionante en los empotramientos, y bosqueje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.

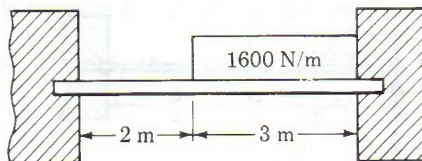


Figura P-736.

737. En la viga perfectamente empotrada de la figura P-737 el empotramiento B ha tenido un asentamiento vertical de valor Δ . Comprobar que $M_B = -M_A = 6EI\Delta/L^2$.

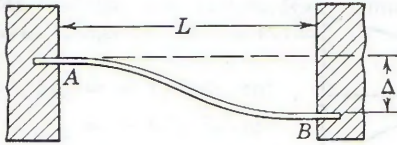


Figura P-737.

738. Una viga doblemente empotrada se somete a la acción de un par M aplicado como indica la figura P-738. Determinar los momentos de empotramiento.

Resp. $M_A = \frac{Mb}{L} \left(\frac{3a}{L} - 1 \right);$
 $M_B = - \frac{Ma}{L} \left(\frac{3b}{L} - 1 \right)$

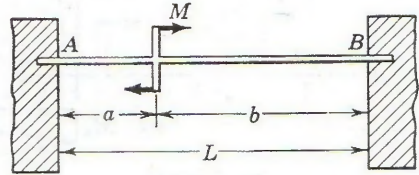


Figura P-738.

7-5. TRANSFORMACIÓN EN VIGA SIMPLEMENTE APOYADA CON MOMENTOS EN LOS EXTREMOS

En general, en una viga doblemente empotrada se calculan fácilmente las reacciones tomando como hiperestáticas o redundantes la reacción vertical y el momento correspondiente a uno de los extremos. Sin embargo, a veces interesa considerar como hiperestáticos los dos momentos de empotramiento. Para ello, se considera la viga como simplemente apoyada en sus extremos y se somete no sólo a las cargas reales aplicadas, sino también a unos momentos desconocidos en sus extremos. Estos momentos han de tener un valor tal que produzcan en los extremos unos giros que, superpuestos a los que producen las cargas reales, reproduzcan las condiciones de sujeción de la viga primitiva. Así, pues, la viga doblemente empotrada de la figura 7-11a se puede considerar equivalente a la viga simplemente apoyada sometida a los dos estados de carga de las figuras 7-11b y c.

Evidentemente, una carga asimétrica como la de la figura 7-11b, da lugar a una pendiente θ_2 mayor que θ_1 . Para anular estos giros al superponer los debidos al estado de carga de la figura 7-11c, se ha de tener $\theta_1 = \theta'_1$ y $\theta_2 = \theta'_2$, lo que requerirá que M_B sea mayor que M_A para que θ'_2 sea mayor que θ'_1 . En otras palabras, *el momento de empotramiento mayor aparece en el extremo más próximo a la resultante de la carga, cuando ésta es de un solo tipo.*

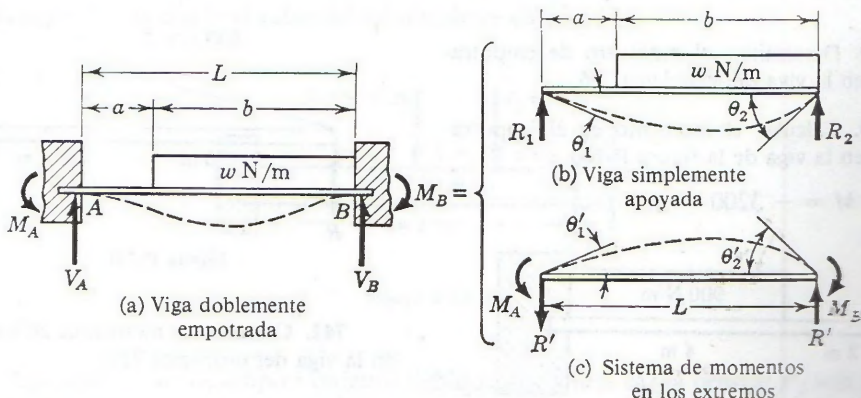


Figura 7-11. Transformación de una viga doblemente empotrada en una simplemente apoyada con la carga distribuida, y en otra con momentos en los extremos.

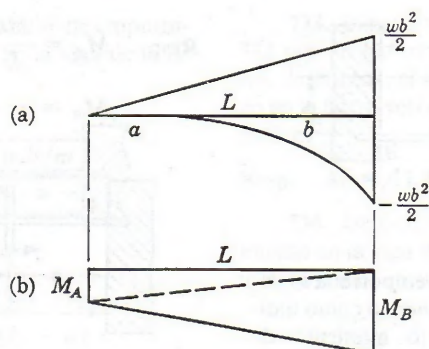


Figura 7-12. Diagramas de momentos para las vigas de las figuras 7-11b y 7-11c.

La diferencia entre los momentos M_B y M_A se equilibra por el par $R'L$ producido por las reacciones R' en los extremos de la viga en el sistema de cargas de la figura 7-11c. Superponiendo las reacciones de las figuras 7-11b y 7-11c se obtienen $V_A = R_1 - R'$ y $V_B = R_2 + R'$, como reacciones totales. Si la carga fuera simétrica, los ángulos θ_1 y θ_2 serían iguales, por lo que M_A y M_B también lo serían. En este caso no habrá par de reacciones R' , por lo que las reacciones serán las mismas que las de la viga simplemente apoyada. Esto coincide con la observación hecha en el problema 718 con carga simétrica.

Al considerar como redundantes o hiperestáticos los momentos en los extremos, para trazar el diagrama de momentos por partes de la viga de la figura 7-11a hay que tener en cuenta los dos sistemas de carga de las figuras 7-11b y c, el diagrama adquiere la forma de la figura 7-12a y b. Aplicando $EI\theta_{AB} = 0$ y $EI\theta_{B/A} = 0$ se obtienen directamente M_A y M_B , mientras que V_A y V_B se determinan después por las ecuaciones de equilibrio estático.

PROBLEMAS

Considerar como reacciones hipérestáticas o redundantes los momentos en los empotramientos.

739. Determinar el momento de empotramiento en la viga del problema 705.

740. Calcular el momento en el empotramiento en la viga de la figura P-740.

Resp. $M = -3200 \text{ N} \cdot \text{m}$

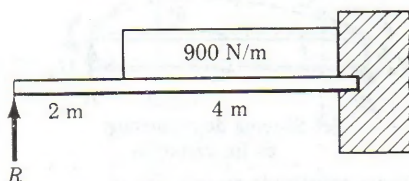


Figura P-740.

741. Determinar el momento en el empotramiento en la viga de la figura P-741.

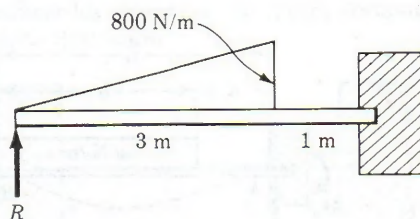


Figura P-741.

742. Calcular los momentos en los extremos en la viga del problema 710.

743. Calcular los momentos en los extremos en la viga del problema 712.

744. Calcular los momentos de empotramiento en la viga de la figura P-744.

Resp. $M_A = -1380 \text{ N} \cdot \text{m}$;
 $M_B = -1820 \text{ N} \cdot \text{m}$

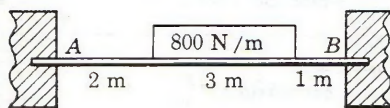


Figura P-744.

745. La viga doblemente empotrada de la figura P-745 soporta la carga uniformemente

distribuida sobre parte de su claro, además del par indicado. Determinar los momentos de empotramiento.

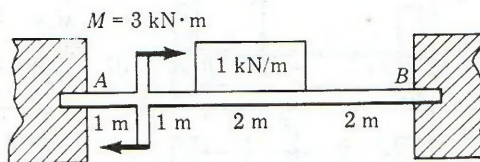


Figura P-745.

Resp. $M_A = -2700 \text{ N} \cdot \text{m}$;
 $M_B = -2190 \text{ N} \cdot \text{m}$

7-6. DISEÑO DE VIGAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS

Aplicando los métodos estudiados en las secciones anteriores, se determinan los valores de los momentos de empotramiento y de las deflexiones máximas, en vigas doblemente empotradas sometidas a diversos tipos de cargas. Estos valores aparecen resumidos en la Tabla 7-2. En los problemas siguientes se verá cómo se aplica el método de superposición en la solución de problemas en los que intervengan otras cargas que sean combinaciones de los tipos que figuran en la tabla.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

746. Determinar el módulo resistente que ha de tener la viga de la figura 7-13 para soportar las cargas indicadas si el esfuerzo admisible es de 80 MN/m^2 .

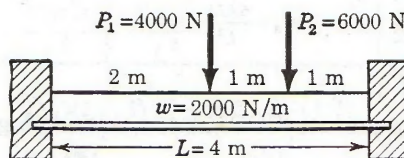
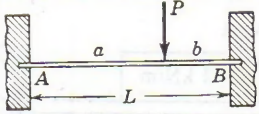
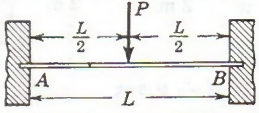
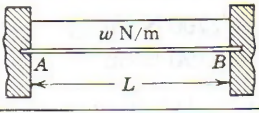
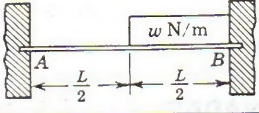
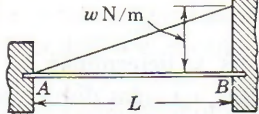
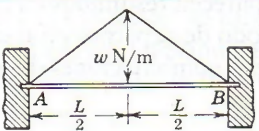
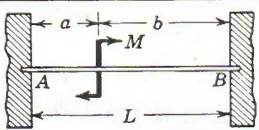
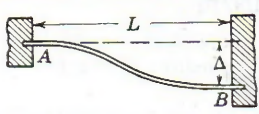


Figura 7-13.

Solución: Los momentos de empotramiento debidos a w y a la carga central P_1 son iguales por simetría y, como se vio en la sección 7-5, la carga excéntrica P_2 produce un momento mayor en el empotramiento más próximo, el derecho en nuestro caso. De acuerdo con los datos

TABLA 7-2. Vigas doblemente empotradas con diversos tipos de carga

CASO No.	TIPO DE CARGA	MOMENTOS EN LOS EXTREMOS	VALOR DE $EI\gamma$ (γ es positiva hacia abajo)
1		$M_A = -\frac{Pab^2}{L^2}$ $M_B = -\frac{Pa^2b}{L^2}$	$EI\gamma$ en el centro = $\frac{Pb^2}{48}(3L-4b)$ Nota: sólo para $a > b$
2		$M_A = M_B = -\frac{PL}{8}$	$EI\gamma$ máximo = $\frac{PL^3}{192}$
3		$M_A = M_B = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{WL}{12}$	$EI\gamma$ máximo = $\frac{wL^4}{384} = \frac{WL^3}{384}$
4		$M_A = -\frac{5}{192}wL^2 = -\frac{5}{96}WL$ $M_B = -\frac{11}{192}wL^2 = -\frac{11}{96}WL$	$EI\gamma$ en el centro = $\frac{wL^4}{768} = \frac{WL^3}{384}$
5		$M_A = -\frac{wL^2}{30} = -\frac{WL}{15}$ $M_B = -\frac{wL^2}{20} = -\frac{WL}{10}$	$EI\gamma$ en el centro = $\frac{wL^4}{768} = \frac{WL^3}{384}$
6		$M_A = M_B = -\frac{5wL^2}{96} = -\frac{5WL}{48}$	$EI\gamma$ máximo = $\frac{7wL^4}{3840} = \frac{7WL^3}{1920}$
7		$M_A = \frac{Mb}{L}\left(\frac{3a}{L}-1\right)$ $M_B = -\frac{Ma}{L}\left(\frac{3b}{L}-1\right)$	
8		$M_A = -\frac{6EI\Delta}{L^2}$ $M_B = \frac{6EI\Delta}{L^2}$	

de la Tabla 7-2, el máximo momento flexionante que tiene lugar en el empotramiento de-recho es:

$$\begin{aligned}
 M_{\text{máx}} &= -\frac{wL^2}{12} - \frac{P_1L}{8} - \frac{P_2a^2b}{L^2} \\
 &= -\frac{2000(4)^2}{12} - \frac{4000(4)}{8} - \frac{6000(3)^2(1)}{(4)^2} \\
 M_{\text{máx}} &= -8040 \text{ N}\cdot\text{m}
 \end{aligned}$$

El signo negativo del momento indica que las fibras del borde superior de la sección están sometidas a tensión, lo que en una sección asimétrica, una T por ejemplo, tiene gran importancia. En una sección simétrica solamente interesa el valor numérico o absoluto del momento máximo. Por la fórmula de la flexión, el módulo resistente necesario es:

$$\left[S = \frac{M}{\sigma} \right]$$

$$S = \frac{8040}{80 \times 10^6} = 100.5 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \\ = 100.5 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

Resp.

747. Seleccionar un perfil laminado para soportar las cargas de la viga de la figura 7-14 sin sobrepasar un esfuerzo admisible de 120 MPa. Calcular la deflexión máxima siendo $E = 200 \text{ GPa}$.

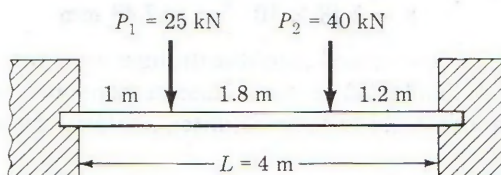


Figura 7-14

Solución: Como la carga es asimétrica y compuesta no se sabe a priori en qué extremo aparecerá el momento máximo, por lo que se han de calcular los momentos de los dos empotramientos. En el extremo izquierdo se tiene:

$$M_{\text{izq}} = -\frac{P_1 ab^2}{L^2} - \frac{P_2 ab^2}{L^2} \\ = -\frac{(25)(1)(3)^2}{(4)^2} - \frac{(40)(2.8)(1.2)^2}{(4)^2} = -24.14 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

y en el extremo derecho,

$$M_{\text{der}} = -\frac{P_1 a^2 b}{L^2} - \frac{P_2 a^2 b}{L^2} \\ = -\frac{(25)(1)^2(3)}{(4)^2} - \frac{(40)(2.8)^2(1.2)}{(4)^2} = -28.21 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Sustituyendo el mayor valor hallado en la fórmula de la flexión resulta:

$$\left[S = \frac{M}{\sigma} \right]$$

$$S = \frac{28.21 \times 10^3}{120 \times 10^6} = 235 \times 10^{-6} \text{ m}^3 = 235 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

Una sección apropiada puede ser un perfil W200 × 27 con $S = 249 \times 10^3 \text{ mm}^3$ e $I = 25.8 \times 10^6 \text{ mm}^4 = 25.8 \times 10^{-6} \text{ m}^4$. Según la tabla 7-2, el valor de la deflexión en el centro* es

$$EIy = \sum \frac{Pb^2}{48}(3L - 4b)$$

$$EIy = \frac{(25)(1)^2}{48}[3(4) - 4(1)] + \frac{(40)(1.2)^2}{48}[3(4) - 4(1.2)]$$

$$EIy = 12.81 \text{ kN} \cdot \text{m}^3$$

Sustituyendo los valores de E e I resulta:

$$(200 \times 10^9)(25.8 \times 10^{-6})y = (12.81 \times 10^3)$$

de donde

$$y = 2.48 \times 10^{-3} \text{ m} = 2.48 \text{ mm}$$

Resp.

PROBLEMAS

748. Una viga doblemente empotrada de 6 m de longitud soporta una carga concentrada de 30 kN a 2 m del extremo izquierdo y otra de 50 kN a 1.5 m del derecho. Elegir un perfil apropiado para soportar estas cargas sin exceder un esfuerzo de 120 MPa. Calcular la deflexión en el centro si $E = 200 \text{ GN/m}^2$.

Resp. W360 × 33; $\delta_c = 3.21 \text{ mm}$

749. Una viga de madera de 150 mm de ancho por 300 mm de altura y 6 m de longitud está perfectamente empotrada en sus extremos. Soporta una carga uniforme de 4 kN/m sobre todo su claro y una carga concentrada P a 2.5 m del extremo izquierdo. Calcular P si el esfuerzo admisible es de 10 MN/m^2 y la deflexión en el centro no debe sobrepasar $1/360$ del claro. $E = 10 \text{ GN/m}^2$.

750. Una viga de acero W200 × 36 de 5 m de longitud y empotrada en sus extremos, soporta una carga concentrada de 20 kN a 1 m del extremo izquierdo y otra de 30 kN a 2 m del extremo derecho. Calcular el máximo esfuerzo normal y la deflexión en el centro. Despreciar el peso propio de la viga y emplear $E = 200 \text{ GPa}$.

751. Una viga de madera de sección rectangular soporta las cargas indicadas en la figura P-751. Determinar la sección necesaria si el esfuerzo admisible es de 10 MN/m^2 . Calcular el valor del esfuerzo cortante máximo.

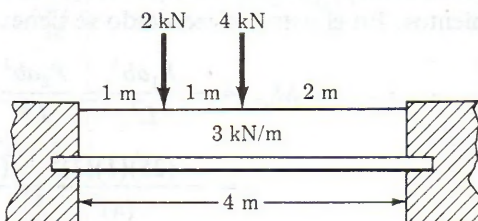


Figura P-751.

752. Con los datos de la tabla 7-2 comprobar los valores de los momentos de empotramiento y la deflexión en el centro de la viga del problema 713.

753. Una viga de madera de 100 mm de ancho por 150 mm de altura soporta las cargas de la figura P-753. Calcular el esfuerzo cortante máximo.

* Al calcular la deflexión en el centro producida por una carga concentrada, el término b es el menor de los segmentos que la carga determina sobre la viga.

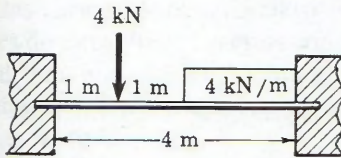


Figura P-753 y P-754

754. En el problema anterior, calcular el esfuerzo normal máximo si el empotramiento derecho sufre un asentamiento de 20 mm con respecto al extremo izquierdo, pero sin rotación alguna. $E = 10 \times 10^9 \text{ N/m}^2$.

Resp. $\sigma = 16.1 \text{ MN/m}^2$

755. Una viga de acero, S130 $\times$ 22, la cual tiene 4 m de longitud, soporta una carga uniformemente variable desde cero, en el extremo izquierdo, hasta 15 kN/m en el derecho. La viga está perfectamente empotrada, pero el extremo derecho se asienta 10 mm respecto del izquierdo. Calcular la relación entre los esfuerzos máximos de flexión en esta situación con respecto a aquella en que los empotramientos estuvieron al mismo nivel. Utilice $E = 200 \text{ GPa}$.

Resp. 1.06

RESUMEN

Los principios estudiados en el capítulo anterior, relativos a la deformación de vigas, se aplican en este capítulo para obtener las ecuaciones de deformación adicionales que, junto con las ecuaciones de equilibrio estático, permiten resolver los problemas estáticamente indeterminados.

En vigas con un extremo empotrado y el otro apoyado se suele aplicar la condición de que la deflexión en el apoyo, restricción redundante, es nula si el apoyo no puede ceder, o de valor conocido si el apoyo puede hacerlo. Para vigas empotradas en sus dos extremos la variación de pendiente de la elástica, de extremo a extremo, es nula, y la deflexión de cada apoyo, respecto del otro, también lo es.

El método de superposición suele ser el más fácil de aplicar en la determinación de la reacción sobrante en el apoyo en el caso de vigas empotradas y apoyadas. Es también el mejor método para el cálculo de los momentos de empotramiento (restricciones hiperestáticas) en el caso de que las cargas sean de los tipos que indica la Tabla 7-2, o combinaciones de ellas.

Para aplicar el método de la doble integración o el de las áreas de momentos se suelen tomar como reacciones redundantes o hiperestáticas la fuerza cortante y el momento flexionante, en uno de los empotramientos. Ambos métodos son igualmente sencillos de aplicar. El método de la doble integración es puramente analítico y proporciona tanto la ecuación de la elástica como los valores de las magnitudes hiperestáticas. El método de las áreas de momentos es de más rápida aplicación para el cálculo de las reacciones, pero requiere un cálculo adicional para determinar los valores de las deflexiones.

En la sección 7-5 se estudia la transformación de una viga doblemente empotrada en una simplemente apoyada con dos estados de carga, el de las cargas aplicadas y otro con los dos momentos en los extremos (momentos desconocidos), transformación que resulta interesante para ver a priori en qué empotramiento aparecerá el momento máximo. Esto es muy útil para aplicar el método de las áreas de momentos a las vigas continuas, como se verá en el próximo capítulo. También servirá de base para un procedimiento muy rápido de trazar el diagrama de fuerzas cortantes, que también se estudia en el siguiente capítulo.