

CAPITULO IV

FATIGAS EN LAS VIGAS

23. Flexión pura de barras prismáticas.—Una barra prismática sometida a la acción de pares iguales y opuestos en sus extremos, se dice que está solicitada a flexión pura. La parte central CD de la barra AB (fig. 76) está sometida a una solici-

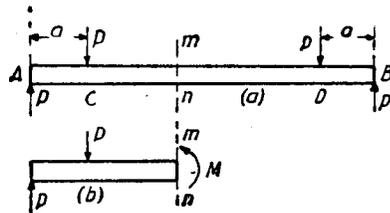


FIG. 76

tación de este tipo. La magnitud Pa del par que produce la flexión se llama momento flector. Considerando la sección mn , y quedándonos con la parte izquierda de la barra, se deduce que para el equilibrio es necesario que las fuerzas internas distribuidas en la sección mn , y que representan las acciones en dicha sección de la parte de la barra situada a su derecha, sean estáticamente equivalentes a un momento M igual y opuesto al momento flector Pa . Para encontrar la distribución de estas fuerzas internas consideraremos la deformación de la barra. En el caso sencillo de una barra que tenga un plano longitudinal de simetría, y cuando los pares flectores actúan en este plano, la flexión tendrá lugar en dicho plano. Si la barra es de sección rectangular y se trazan dos líneas verticales mm y pp en sus lados, los ensayos experimentales realizados han hecho ver que dichas líneas permanecen rectas durante la flexión y giran hasta quedar perpendiculares a las fibras longitudinales de la barra (figura 77). La teoría que vamos a exponer de la flexión se basa en la hipótesis de que no solamente las líneas, tales como mm ,

permanecen rectas, sino que toda la sección transversal de la barra, primitivamente plana, queda plana y normal a las fibras longitudinales de la barra después de la flexión. Los ensayos realizados han dado resultados concordantes con los obtenidos desarrollando la teoría, basada en aquella hipótesis, en lo concerniente a la flexión de la barra y a la deformación de las fibras longitudinales. De la hipótesis anterior se deduce que du-

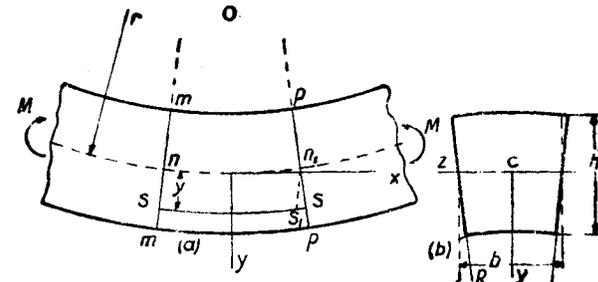


FIG. 77.

rante la flexión las secciones mm y pp giran, una respecto a otra, alrededor de ejes perpendiculares al plano de flexión, de tal modo que las fibras longitudinales del lado convexo sufren extensión, y compresión las del lado cóncavo. La línea nn_1 es la traza sobre el plano de la figura de la superficie cuyas fibras no sufren deformación durante la flexión. Esta superficie se llama superficie neutra, y su intersección con cualquier sección recta de la barra se denomina línea neutra.

El alargamiento $s's_1$ de cualquier fibra situada a una distancia y de la superficie neutra se obtiene trazando la línea n_1s_1 , paralela a mm —fig. 77 (a)—. Representando por r el radio de curvatura del eje de la barra después de la flexión¹, y usando la semejanza de los triángulos non_1 y s_1n_1s' , el alargamiento unitario de la fibra ss' será

$$\epsilon_x = \frac{s's_1}{nn_1} = \frac{y}{r} \tag{52}$$

¹ El eje de la barra es la línea que pasa por los centros de gravedad de sus secciones. O representa el centro de curvatura.

Se ve, por tanto, que la deformación unitaria en cada fibra longitudinal es proporcional a su distancia a la superficie neutra, e inversamente proporcional al radio de curvatura.

Los ensayos realizados han puesto de manifiesto que la extensión de las fibras del lado convexo de la barra viene acompañada de una contracción lateral, y la contracción longitudinal del lado cóncavo de una expansión lateral, tal como en el caso de extensión o compresión simple (véase artículo 14). Esto cambia la forma de todas las secciones rectas. Los lados verticales de la sección rectangular se inclinan tal como indica la figura 77 (b). La deformación unitaria en sentido lateral es

$$\epsilon_z = -\mu\epsilon_x = -\mu\frac{y}{r} \quad (53)$$

donde μ es el módulo de Poisson.

Debido a esta distorsión todas las líneas rectas situadas en la sección recta y paralelas al eje z se transforman en curvas normales a los lados de la sección.

Su radio de curvatura R será mayor que r y estará con él en la misma relación que ϵ_x y ϵ_z (véase ecuación 53); por tanto,

$$R = \frac{1}{\mu} r. \quad (54)$$

La fatiga en las fibras longitudinales, deducida de la ley de Hooke, es

$$\sigma_x = \frac{Ey}{r}. \quad (55)$$

La distribución de estas fatigas se ve en la figura 78. La fatiga en cualquier fibra es proporcional a su distancia al eje neutro mn . La posición del eje neutro y el valor del radio de curvatura r pueden determinarse por la condición de que las fuerzas ligadas a la sección determinen un par resistente que equilibre al par exterior M (fig. 76).

Sea dA el área de un elemento de una sección recta e y su distancia al eje neutro (fig. 78). La fuerza ligada a este área elemental es el producto del área por la fatiga (ecuación 55), es decir, $\frac{Ey}{r} dA$. Puesto que el sistema de fuerzas elementales que

actúa sobre la sección recta equivale a un par, la resultante de dichas fuerzas será cero, y tendremos

$$\int \frac{Ey}{r} dA = \frac{E}{r} \int y dA = 0,$$

es decir, el momento estático del área de la sección recta con relación al eje neutro es cero, o, lo que es lo mismo, la línea neutra pasa por el centro de gravedad de la sección.

El momento de la fuerza ligada al elemento antes dicho, respecto a la línea neutra, es $\frac{Ey}{r} dAy$.

Sumando todos los momentos de las fuerzas ligadas a la sección recta de la barra, y escribiendo que el resultado es igual al momento M de las fuerzas exteriores, se tendrá la siguiente ecuación, que sirve para determinar el radio de curvatura:

$$\int \frac{E}{r} y^2 dA = \frac{EI_z}{r} = M \quad \text{o} \quad \frac{1}{r} = \frac{M}{EI_z}, \quad (56)$$

en la cual $I_z = \int y^2 dA$ es el momento de inercia de la sección recta con relación al eje neutro z (véase *Apéndice*, pág. 335). En la ecuación (56) se ve que la curvatura varía en proporción directa con el momento flector, e inversa respecto a la cantidad EI_z , que por esto se denomina rigidez a la flexión de la barra. Eliminando r entre las ecuaciones (55) y (56), se obtiene la expresión siguiente para la fatiga:

$$\sigma_x = \frac{My}{I_z}. \quad (57)$$

El análisis precedente se ha hecho para una sección rectangular. Es válido también para el caso de una barra de cualquier tipo, de sección recta, que tenga un plano longitudinal de simetría y esté solicitado a flexión por pares que actúen en sus extremos y obren en este plano, puesto que en tal caso la flexión de la barra se presenta en dicho plano, y las secciones rectas,

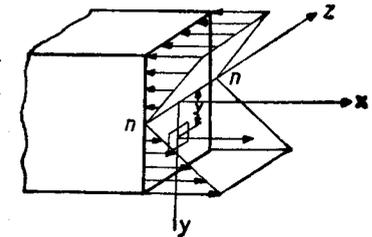


FIG. 78

primitivamente planas y normales al eje de la barra, quedan planas y normales a las fibras longitudinales después de la flexión.

En la ecuación (57), M es positivo cuando produce una flexión como la de la figura 77; y es positiva hacia abajo.

Un signo negativo para σ_x indica, según sabemos, una fatiga de compresión.

Las fatigas máximas de compresión y extensión se presentan en las fibras más alejadas de la línea neutra, y para la sección rectangular, o cualquier otra forma de sección que tenga el centro de gravedad a la mitad de la altura o canto de la viga h , en que $y_{m\acute{a}x} = \frac{h}{2}$, valen

$$(\sigma_x)_{m\acute{a}x} = \frac{Mh}{2I_z}, \quad y \quad (\sigma_x)_{m\grave{a}n} = -\frac{Mh}{2I_z}. \quad (58)$$

Para simplificar se acostumbra a usar la anotación

$$Z = \frac{2I_z}{h} \quad (59)$$

y entonces

$$(\sigma_x)_{m\acute{a}x} = \frac{M}{Z}; \quad (\sigma_x)_{m\grave{a}n} = -\frac{M}{Z}. \quad (60)$$

La cantidad Z se denomina módulo o momento resistente de la sección. En el caso de una sección rectangular —fig. 77 (b)— se tiene

$$I_z = \frac{bh^3}{12}; \quad Z = \frac{bh^2}{6}.$$

Para una sección circular de diámetro d ,

$$I_z = \frac{\pi d^4}{64}; \quad Z = \frac{\pi d^3}{32}.$$

Para las diversas formas de perfiles, Γ , \square , etc., los diferentes valores de I_z y Z están tabulados en los manuales y catálogos.

Cuando el centro de gravedad de la sección recta no está a la mitad de la altura de la viga, como, por ejemplo, en el caso de una viga en T, si h_1 y h_2 representan las distancias de la línea

neutra a las fibras más alejadas hacia abajo y hacia arriba, las fatigas máximas para un momento M positivo serán

$$(\sigma_x)_{m\acute{a}x} = \frac{Mh_1}{I_z}, \quad (\sigma_x)_{m\grave{a}n} = -\frac{Mh_2}{I_z}. \quad (61)$$

Para un momento negativo,

$$(\sigma_x)_{m\acute{a}x} = -\frac{Mh_2}{I_z}, \quad (\sigma_x)_{m\grave{a}n} = \frac{Mh_1}{I_z}. \quad (62)$$

Los anteriores razonamientos y consecuencias se han hecho en la hipótesis de que la barra tuviese un plano longitudinal de simetría en el cual actuasen los momentos flectores; sin embar-

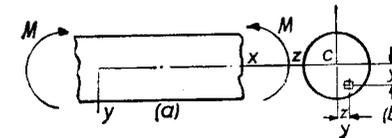


FIG. 79

go, los resultados pueden aplicarse también cuando dicho plano no existe, con tal de que los pares de flexión actúen en un plano axial que contenga uno de los dos ejes principales de la sección recta (véase *Apéndice*, pág. 344). Estos planos se denominan planos principales de flexión.

Cuando hay un plano de simetría y los pares de flexión actúan en este plano, la flexión se presenta en él. El momento de las fuerzas interiores, tales como las que muestra la figura 78, respecto al eje horizontal, equilibra al par de las fuerzas exteriores.

Los momentos de dichas fuerzas interiores, respecto al eje vertical, se anulan unos con otros, debido a que los momentos de las fuerzas a un lado del eje son exactamente equilibrados por los momentos de las fuerzas correspondientes del otro lado.

Cuando no hay plano de simetría, pero los pares flectores actúan en un plano axial que pasa por uno de los ejes principales de la sección, xy en la figura 79, una distribución de fatigas que sigue la ley de la ecuación (56) satisface a las condiciones de equilibrio. Esta distribución da, según se ha visto, un par

alrededor del eje horizontal (eje principal z) que equilibra al par exterior. Alrededor del otro eje principal y , el momento resultante vale

$$M_y = \int z \frac{Ey}{r} dA = \frac{E}{r} \int yz dA.$$

Esta integral es el producto de inercia de la sección recta (véase Apéndice, pág. 341), y es cero si y y z son los ejes principales de la sección.

En nuestro caso así se verifica y, por tanto, las condiciones de equilibrio quedan satisfechas.

Problemas

1. Determinar la fatiga máxima en un eje de locomotora (fig. 80) si $c = 35$ cm., el diámetro d del eje es 25 cm. y la carga P en el extremo es 13.000 kg.

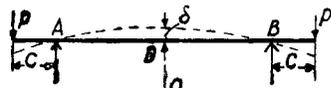


FIG. 80

Solución: El momento flector que actúa en la parte media del eje es $M = P \times c = 13.000 \times 35$ kg. \times cm.

La fatiga máxima por la ecuación (60) es

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{Z} = \frac{32 \cdot M}{\pi d^3} = \frac{32 \times 13.000 \times 35}{\pi \times 25^3} = 300 \text{ kg./cm.}^2$$

2. Determinar el radio de curvatura r y la flecha del eje del problema anterior si el material es acero y la distancia entre los centros de los apoyos es 150 cm.

Solución: El radio de curvatura r se determina por la ecuación (55), sustituyendo $y = \frac{d}{2} = 12,5$ cm. y $\sigma_{\max} = 300$ kg./cm.²

$$r = \frac{E d}{\sigma} = \frac{2 \times 10^6 \times 25}{2 \times 300} = 833 \text{ m.}$$

Para calcular δ (fig. 80), se tendrá en cuenta que la curva de flexión es un círculo de radio r y \overline{DB} es un cateto del triángulo rectángulo DOB , en el que O es el centro de curvatura. Por tanto,

$$\overline{DB}^2 = r^2 - (r - \delta)^2 = 2r\delta - \delta^2,$$

δ es muy pequeño comparado con el radio r y la cantidad δ^2 puede despreciarse en la expresión anterior, de este modo:

$$\delta = \frac{\overline{DB}^2}{2r} = \frac{150^2}{8 \times 83,300} = 0,0337 \text{ cm.}$$

3. Una viga de madera de sección cuadrada de 25×25 cm. está apoyada en A y B (fig. 80), y en sus extremos se aplican las cargas P . Determinar el valor de P y la flecha δ en el centro, si $AB = 5,4$ m., $c = 0,90$ m.; $(\sigma_x)_{\max} = 70$ kg./cm.² y $E = 10^5$ kg./cm.².

El peso de la viga se desprecia.

Respuesta:

$$P = 2.025 \text{ kg.}; \quad \delta = 0,204 \text{ cm.}$$

4. Una vigueta comercial de 30 cm. está apoyada como indica la figura 81 y cargada en los voladizos con una carga uniformemente distribuida de 1.000 kg./m. Determinar la fatiga máxima en la parte central de la viga y la flecha en su punto medio, si $I_z = 9.785$ cm.⁴.

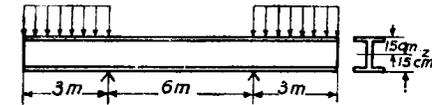


FIG. 81

Solución: El momento flector en la parte central de la viga será $M = 1.000 \times 3 \times 150 = 450.000$ kg. \times cm.

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{450.000 \times 15}{9785} = 690 \text{ kg./cm.}^2;$$

$$\delta = 1,03 \text{ cm.}$$

5. Determinar la fatiga máxima producida en un alambre de acero de diámetro $d = 0,8$ mm., cuando se arrolla a una polea de diámetro $D = 50$ cm.

Solución: El alargamiento máximo debido a la flexión, ecuación 52, es

$$\epsilon = \frac{d}{D} = \frac{0,08}{50}$$

y la fatiga de extensión correspondiente es

$$(\sigma_x)_{\max} = \epsilon E = \frac{0,08 \times 2 \times 10^6}{50} = 3.200 \text{ kg./cm.}^2$$

6. Una regla de acero de sección recta $0,08 \times 2,5$ cm. y una longitud $l = 25$ cm. se flexa, aplicando pares en sus extremos en forma de arco circular de 60° .

Determinar la fatiga máxima y la flecha.

Solución: El radio de curvatura r se determina por la ecuación $l = \frac{1}{6} 2 \pi r$, de donde $r = 23,87$ cm., y la fatiga máxima por la ecuación (55),

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{E \times 0,04}{r} = \frac{8 \times 10^4}{23,87} = 3.350 \text{ kg./cm.}^2$$

La flecha calculada para un arco de círculo es

$$\delta = r (1 - \cos 30^\circ) = 3,2 \text{ cm.}$$

que los ejes x e y vayan a coincidir con los de la figura 56. El valor necesario de b lo da la expresión

$$Z = \frac{b^3}{6} = \frac{M_{\max}}{\sigma_t} = \frac{87,400}{40}$$

de donde

$$b = 23,5 \text{ cm.}$$

La construcción de los diagramas se deja como ejercicio.

9. Determinar las dimensiones de una viga en voladizo de sección I comercial uniformemente cargada a razón de $q = 350 \text{ kg./m.}$ y sometida además a la acción en su extremo de una carga concentrada de valor $P = 250 \text{ kg.}$ La longitud es $l = 1,5 \text{ m.}$ y $\sigma_t = 1.000 \text{ kg./cm.}^2$

Solución:

$$Z = \frac{(250 \times 1,5 + 525 \times 0,75) \times 100}{1.000} = 76,87 \text{ cm.}^3$$

El perfil comercial necesario es una I de 14 cm. de altura y 18,20 cm.³ de sección.

10. Determinar las fatigas de flexión en un roblón suponiendo que las cargas que obran sobre él están distribuidas en la forma que indica la figura 95.

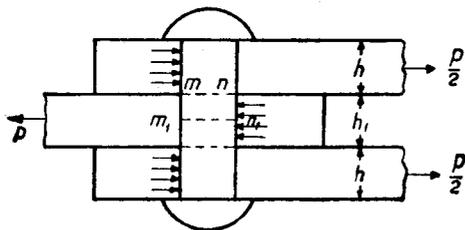


FIG. 95

El diámetro del roblón 2 cm., $h = 0,6 \text{ cm.}$, $h_1 = 1 \text{ cm.}$, $P = 5.000 \text{ kg.}$

Solución: El momento flector en la sección mn es $\frac{P}{2} \cdot \frac{h}{2}$. El momento de flexión en la sección central m_1n_1 es

$$\frac{P}{2} \left(\frac{h}{2} + \frac{h_1}{4} \right).$$

Este momento, que es el máximo, se tomará para calcular la fatiga

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{P}{2} \left(\frac{h}{2} + \frac{h_1}{4} \right) : \frac{\pi d^3}{32} = \frac{4P}{\pi d^3} \times \frac{2h + h_1}{d} = 1.750 \text{ kg./cm.}^2.$$

11. Determinar el perfil en I necesario para los casos de las figuras 67 (a), 67 (d) y 68 (b), suponiendo una fatiga de trabajo de 1.200 kg./cm.².

12. Determinar el perfil necesario para una viga apoyada de sección en I solicitada por una carga uniforme a razón de 650 kg. por

metro y por una carga $P = 2.000 \text{ kg.}$ que actúa en su centro. La longitud de la viga es 4,50 m. y la fatiga de trabajo $\sigma_t = 1.200 \text{ kg. por cm.}^2$.

13. Una U, cuya sección es la de la figura 85, está apoyada en sus extremos y solicitada por una carga concentrada en su sección central. Calcular el valor máximo que puede tomar la carga si la fatiga de trabajo es 80 kg./cm.² a extensión, y 160 kg./cm.² a compresión.

26. La fatiga cortante en la flexión.—En el párrafo anterior se vió que al flexarse una viga por la acción de cargas transversales, a las fatigas normales σ_x debían acompañar otras τ , ligadas ambas a la sección mn de la viga (fig. 96). Considerando la acción en el trozo a la derecha de la sección (fig. 96), se deduce, para que subsista el equilibrio, que la sumación de estas fatigas cortantes debe igualar a la fuerza cortante V . Para encontrar la ley de su distribución a lo largo de la sección, empezaremos por considerar el caso sencillo de una sección rectangular (fig. 97). En este caso es lógico suponer que las fatigas cortantes τ son paralelas en cada punto a la fuerza cortante V , es decir, paralelas a los lados mn de la sección y que su distribución es uniforme a lo largo del ancho de la viga cc_1 . Representaremos las fatigas en este caso con τ_{xy} . El subíndice y indica que la fatiga cortante es paralela al eje y , y el subíndice x , que está ligada a un plano perpendicular al eje x . Estas dos hipótesis nos servirán para la determinación completa de la distribución de las fatigas cortantes. Un estudio más detenido del problema muestra que la solución aproximada que obtengamos es suficientemente exacta para las aplicaciones y que en el caso de una sección rectangular estrecha (h grande comparado con b , figura 97) prácticamente coincide con la solución exacta ¹.

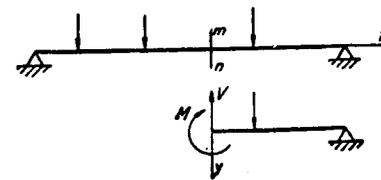


FIG. 96

¹ La solución exacta de este problema se debe a De Saint Venant, *Journal de Math.* (Liouville), 1856. Un resumen del famoso trabajo de De Saint Venant puede verse en la *History of the Theory of Elasticity*, de Todhunter y Pearson. La solución aproximada que damos se debe a Jouravski. La traducción francesa de este trabajo figura en *Annales des ponts et chaussées*, 1856. La teoría exacta muestra que cuando la altura de la viga es pequeña comparada con su ancho, la discrepancia entre la solución exacta y la aproximada es considerable.

Si se separa un elemento de la viga por dos secciones adyacentes y por dos planos paralelos al plano neutro e infinitamente próximos —fig. 97 (b)—, la fatiga cortante τ_{xy} en la cara vertical acc_1a_1 tendrá una distribución uniforme de acuerdo con la hipótesis establecida. Estas fatigas tienen un momento $(\tau_{xy}b dy)dx$

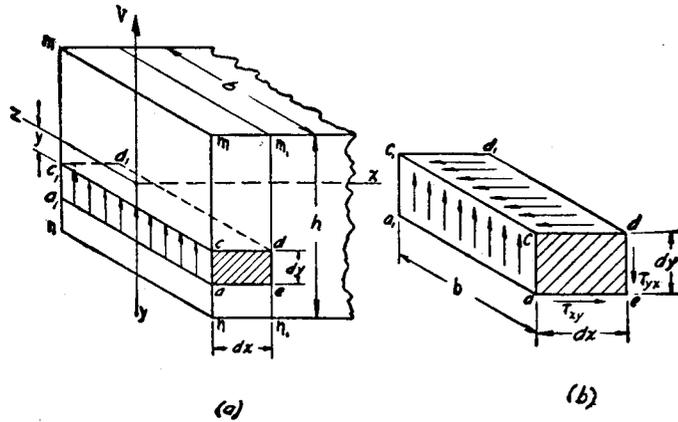


FIG. 97

respecto a la arista ee del elemento que debe equilibrar al momento $(\tau_{yx}b dx)dy$ debido a las fatigas cortantes distribuidas sobre la cara horizontal cdd_1c_1 del elemento.

Por tanto,

$$\tau_{xy}b dy dx = \tau_{yx}b dx dy \quad \text{y} \quad \tau_{yx} = \tau_{xy}$$

es decir, las fatigas cortantes que actúan en dos caras perpendiculares del elemento son iguales. Este mismo resultado se obtuvo anteriormente al estudiar la extensión simple (véase página 39) y también en el caso de compresión o extensión en dos direcciones perpendiculares (véase pág. 43). La existencia de las fatigas cortantes en los planos paralelos al plano neutro puede ponerse de manifiesto con experimentos sencillos. Sea, por ejemplo, dos barras iguales rectangulares dispuestas en conjunto sobre apoyos simples, tal como indica la figura 98, y sometidas a flexión por la acción de una carga concentrada P . Si no existe rozamiento entre las vigas, la flexión de cada una será independiente de la otra y en ambas tendremos compresión en la cara

superior y extensión en la inferior, tomando el conjunto la forma de equilibrio indicada en la figura 98 (b). Las fibras longitudinales inferiores de la barra superior deslizarán, respecto a las fibras superiores de la barra inferior. En el caso de una sola barra de altura $2h$ —fig. 98 (a)—, existirán fatigas cortantes a lo largo del plano neutro nn de una magnitud que evite el deslizamiento de la parte superior de la barra respecto a la inferior —véase figura 98 (b)—. Debido a esto, la barra única de altura $2h$ es mucho más rígida y resistente que el conjunto de las dos barras de altura h . Como aplicación práctica, citaremos el caso de la unión de vigas de madera para formar una sola

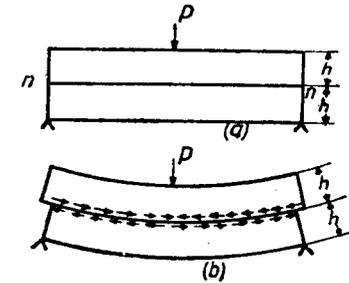


FIG. 98

—figura 99 (a)—; entonces se acostumbra a practicar cajas comunes a las vigas, tales como las a, b, c, \dots , donde se introducen las llaves correspondientes, cuyo objeto es evitar el deslizamiento y favorecer la robustez. Observando los juegos alrededor de la llave —fig. 99 (b)—, se ve fácilmente la dirección en que tiende a producirse el deslizamiento y, por consiguiente, la dirección de la fatiga cortante a lo largo del plano neutro, en el caso de viga única.

Anteriormente vimos que la fatiga cortante τ_{xy} en cualquier punto de la sección vertical de la viga tiene dirección verti-

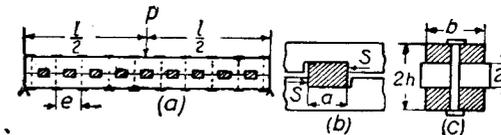


FIG. 99

cal y es numéricamente igual a la fatiga cortante τ_{yx} afecta al plano horizontal que pasa por el mismo punto. Esta última puede calcularse fácilmente por la condición de equilibrio del elemento pp_1nn_1 , separado de la viga en virtud de dos secciones adyacentes verticales mn y m_1n_1 y una horizontal pp_1 —fig. 100 (a) y (b)—. Las únicas fuerzas que actúan sobre este elemento en la

dirección del eje x son: la fatiga cortante τ_{yx} afecta a la cara pp_1 y las fatigas normales σ_x sobre las caras np y n_1p_1 . Si el momento flector en las secciones mn y m_1n_1 vale lo mismo, es decir, estamos en un caso de flexión pura, las fatigas normales σ_x sobre las caras np y n_1p_1 serán iguales y se equilibrarán entre sí. En este caso, la fatiga cortante τ_{yx} será igual a cero.

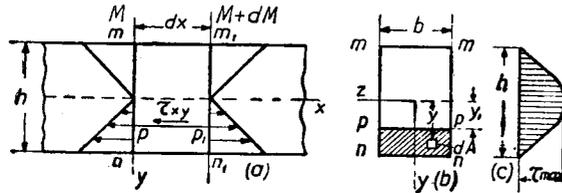


FIG. 100

Consideremos ahora el caso más general de que el momento flector varíe y sean M y $M + dM$ los momentos en las secciones mn y m_1n_1 , respectivamente. En este caso, la fuerza normal que obra en el área elemental dA de la cara $nppn$ será (ecuación 57)

$$\sigma_x dA = \frac{My}{I_z} dA.$$

La suma de todas estas fuerzas repartidas a lo largo de la cara $nppn$ del elemento valdrá

$$\int_{y_1}^{\frac{h}{2}} \frac{My}{I_z} dA. \tag{a}$$

De la misma manera, la suma de las fuerzas normales ligadas a la cara $n_1p_1p_1n_1$, será

$$\int_{y_1}^{\frac{h}{2}} \frac{(M + dM)y}{I_z} dA. \tag{b}$$

La fuerza total debida a la fatiga cortante τ_{yx} que obra en la cara pp_1 del elemento es

$$\tau_{xy} b dx, \tag{c}$$

y como las fuerzas dadas por (a), (b) y (c) deben estar en equilibrio, resulta:

$$\tau_{xy} b dx = \int_{y_1}^{\frac{h}{2}} \frac{(M + dM)y}{I_z} dA - \int_{y_1}^{\frac{h}{2}} \frac{My}{I_z} dA,$$

de donde

$$\tau_{xy} = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{1}{bI_z} \cdot \int_{y_1}^{\frac{h}{2}} y dA,$$

o, aplicando la ecuación (50),

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{V}{bI_z} \int_{y_1}^{\frac{h}{2}} y dA. \tag{64}$$

La integral de esta ecuación tiene una interpretación muy sencilla.

Representa el momento estático de la parte rayada de la sección recta —fig. 100 (b)—, respecto al eje neutro z . Para nuestra sección

$$dA = b dy$$

y la integral vale

$$\int_{y_1}^{\frac{h}{2}} by dy = \left| \frac{by^2}{2} \right|_{y_1}^{\frac{h}{2}} = \frac{b}{2} \left[\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right] \tag{d}$$

El mismo resultado puede obtenerse multiplicando el área $b \left[\left(\frac{h}{2} \right) - y_1 \right]$ de la parte rayada por la distancia $\frac{1}{2} \left[\left(\frac{h}{2} \right) + y_1 \right]$ de su centro de gravedad al eje neutro de la sección.

Sustituyendo (d) en la ecuación (64), se obtiene para la sección rectangular

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{V}{2I_z} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) \tag{65}$$

Se ve que las fatigas cortantes τ_{xy} se distribuyen de modo variado desde la parte superior a la inferior de la viga. El máximo valor se presenta para $y_1 = 0$, es decir, para los puntos de la línea neutra, y es (ecuación 65):

$$(\tau_{xy})_{\text{máx}} = \frac{Vh^2}{8I_z};$$

y como

$$I_z = \frac{bh^3}{12}, \quad (\tau_{xy})_{\text{máx}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{V}{bh}. \tag{66}$$

Se ve, por tanto, que la fatiga cortante máxima en el caso

de una sección rectangular es un 50 por 100 mayor que la fatiga cortante media obtenida dividiendo la fuerza cortante por el área de la sección.

En los extremos superior e inferior de la sección recta, $y_1 = \pm \frac{h}{2}$ y la ecuación (65) da $\tau_{xy} = 0$. La representación gráfica de la ecuación (65) —fig. 100 (c)— muestra que la distribución de fatiga cortante a lo largo de la altura de la viga sigue una ley parabólica. El área rayada, limitada por la parábola, multiplicada por el ancho de la viga, da $\frac{2}{3} (\tau_{xy})_{\text{máx}} hb = V$, como es natural que ocurriese.

Una consecuencia lógica de estas fatigas cortantes es la distorsión por la que las secciones, inicialmente planas, se alabean.

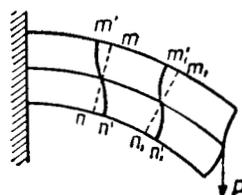


FIG. 101

Este alabeamiento puede observarse fácilmente flexando por la acción de una fuerza en su extremo una pieza de goma de sección rectangular (fig. 101), en cuyas caras laterales se hayan trazado líneas verticales. Las líneas no permanecen rectas, tal como se indica de puntos en la figura, sino que se curvan de tal modo que la distorsión máxima se presenta en la superficie neutra. En los puntos m', m_1, n', n_1 , la distorsión es cero y las curvas $m'n'$ y $m_1'n_1$ quedan normales a las superficies superior e inferior de la barra después de la flexión. En la superficie neutra los ángulos que forman las tangentes a las curvas $m'n'$ y $m_1'n_1$ y las secciones normales mn y m_1n_1 valen $\gamma = \frac{1}{G} (\tau_{xy})_{\text{máx}}$.

Si la fuerza cortante permanece constante a lo largo de la viga, el alabeamiento de todas las secciones rectas es el mismo. de modo que $mm' = m_1m'_1, nn' = n_1n'_1$ y el alargamiento o alargamiento de las fibras longitudinales producido por la flexión es el mismo que si no existiese dicha fuerza y estuviésemos en un caso de flexión pura.

Esto explica la validez de la ecuación (57), establecida en la hipótesis de que las secciones primitivamente planas lo son después de la flexión.

Un estudio más detenido del problema ¹ muestra que el alabeamiento de las secciones rectas no afecta de modo sustancial a la deformación de las fibras longitudinales si sobre la viga actúa una carga distribuida y la fuerza cortante varía de modo continuo a lo largo de la viga.

En el caso de cargas concentradas, la distribución de fatigas en las proximidades de la carga es más complicada; pero esta complicación tiene un carácter local (véase Segunda parte).

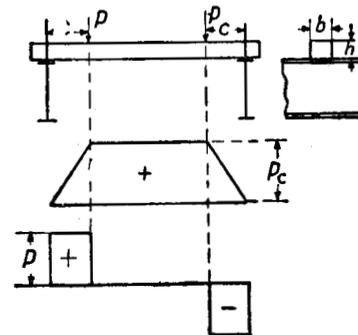


FIG. 102

Problemas

1. Determinar el valor límite de las cargas P que obran sobre la viga rectangular de madera de la figura 102, si $b = 20$ cm., $h = 25$ cm., $\sigma_t = 60$ kg./cm.², $\tau_t = 15$ kg./cm.², $c = 45$ cm.

Solución: Los diagramas del momento flector y de la fuerza cortante son los de la figura 102:

$$V_{\text{máx}} = P; \quad M_{\text{máx}} = P \cdot c.$$

Por las ecuaciones

$$\frac{Pc}{Z} = \sigma_t \quad \text{y} \quad \frac{3}{2} \frac{P}{bh} = \tau_t,$$

se obtiene

$$P = 2.778 \text{ kg.} \quad \text{y} \quad P = 5.000 \text{ kg.}$$

Por consiguiente, $P = 2.778$ kg. es el valor admisible de la carga P .

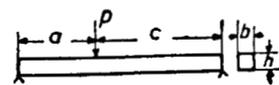


FIG. 103

2. Determinar la fatiga normal máxima σ_x y la fatiga cortante máxima τ_{xy} en el plano neutro de la viga representada en la figura 103, si $a = 60$ cm., $c = 1,20$ m., $b = 20$ cm., $h = 25$ cm. y $P = 3.000$ kg.

Respuesta:

$$(\sigma_x)_{\text{máx}} = 57 \text{ kg./cm.}^2; \quad (\tau_{xy})_{\text{máx}} = 6 \text{ kg./cm.}^2$$

¹ Véase W. Voigt, *Göttingen Abhandlungen*, Bd. 34, 1887; J. H. Michell, *Quart. J. of Math.*, vol. 32, 1901, y L. N. G. Filon, *Phil. Trans. Roy. Soc. (Ser. A)*, vol. 201, 1903, y *London Roy. Soc. Proc.*, vol. 72, 1904.