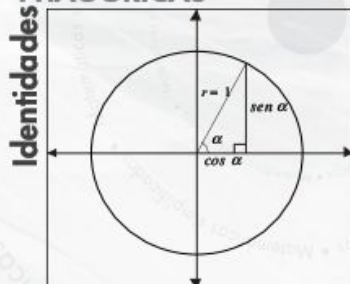


IDENTIDADES Y ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

IDENTIDADES PITAGÓRICAS



Definiciones de
ángulos del libro
Los elementos de Euclides

A sí se denomina a las identidades que resultan del teorema de Pitágoras y se obtienen del círculo unitario mediante un triángulo rectángulo de hipotenusa 1 y catetos con longitudes $\text{sen } \alpha$ y $\text{cos } \alpha$.

Por definición del teorema de Pitágoras:

$$(1)^2 = (\text{sen } \alpha)^2 + (\text{cos } \alpha)^2$$

$$1 = \text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha$$

A la cual se le denomina identidad fundamental.

Identidades trigonométricas

Son igualdades en las que intervienen funciones trigonométricas y es válida para cualquier valor angular.

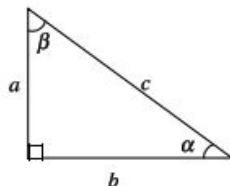
Obtención de las identidades trigonométricas básicas

Para determinar las identidades se hace uso de las definiciones de las funciones trigonométricas.

En el triángulo las funciones del ángulo α se definen:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{c} \quad \tan \alpha = \frac{a}{b} \quad \operatorname{csc} \alpha = \frac{c}{a}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} \quad \sec \alpha = \frac{c}{b}$$



Al multiplicar una función directa por cada una de sus recíprocas se obtiene:

$$(\operatorname{sen} \alpha)(\operatorname{csc} \alpha) = \left(\frac{a}{c}\right) \cdot \left(\frac{c}{a}\right) = \frac{a \cdot c}{c \cdot a} = 1$$

$$(\cos \alpha)(\sec \alpha) = \left(\frac{b}{c}\right) \cdot \left(\frac{c}{b}\right) = \frac{b \cdot c}{c \cdot b} = 1$$

$$(\tan \alpha)(\operatorname{ctg} \alpha) = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{b}{a}\right) = \frac{a \cdot b}{b \cdot a} = 1$$

Por tanto, se deducen las identidades recíprocas.

Identidades recíprocas

$$(\operatorname{sen} \alpha)(\operatorname{csc} \alpha) = 1 \quad (\cos \alpha)(\sec \alpha) = 1 \quad (\tan \alpha)(\operatorname{ctg} \alpha) = 1$$

Al realizar los respectivos despejes en las identidades anteriores, se obtienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= \frac{1}{\operatorname{csc} \alpha} & \tan \alpha &= \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} & \operatorname{csc} \alpha &= \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \\ \cos \alpha &= \frac{1}{\sec \alpha} & \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{1}{\tan \alpha} & \sec \alpha &= \frac{1}{\cos \alpha} \end{aligned}$$

Identidades de cociente

Si se realiza el cociente de la función seno ($\operatorname{sen} \alpha$) por la función coseno ($\cos \alpha$), se obtiene la función $\tan \alpha$:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b} = \tan \alpha$$

De manera análoga se obtiene la función cotangente ($\operatorname{ctg} \alpha$),

$$\frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b \cdot c}{a \cdot c} = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha$$

Por tanto:

$$\tan \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \quad ; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Identidades pitagóricas

En el triángulo se aplica el teorema de Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Se divide entre c^2 a ambos miembros.

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

Se aplica la ley de los exponentes.

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

Los cocientes son equivalentes a las funciones $\operatorname{sen} \alpha$ y $\cos \alpha$

$$(\operatorname{sen} \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1, \quad \text{por consiguiente } \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

En forma semejante se obtienen las demás identidades pitagóricas, entonces:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad ; \quad \tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha \quad \text{y} \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \csc^2 \alpha$$

De las identidades anteriores se realizan despejes, con el fin de obtener otras identidades:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \csc^2 \alpha$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \pm \sqrt{(1 - \cos^2 \alpha)}$$

$$\tan \alpha = \pm \sqrt{(\sec^2 \alpha - 1)}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \pm \sqrt{(\csc^2 \alpha - 1)}$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{(1 - \operatorname{sen}^2 \alpha)}$$

$$\sec \alpha = \pm \sqrt{(\tan^2 \alpha + 1)}$$

$$\csc \alpha = \pm \sqrt{(\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1)}$$

Demostración de identidades trigonométricas

Para realizar la demostración de una identidad trigonométrica se aplican procesos algebraicos como la factorización, las operaciones entre fracciones así como su simplificación, además de las identidades trigonométricas básicas.

La aplicación de estos procesos depende de la identidad en sí; esto significa que no existe un orden o procedimiento específico, debido a esta situación sugerimos iniciar con el lado más complejo o elaborado de la igualdad, con el fin de llegar a demostrar el lado más sencillo, como a continuación se ejemplifica.

EJEMPLOS

Ejemplo 1

Demuestra la siguiente identidad: $\operatorname{sen} x = \frac{\cos x}{\operatorname{ctg} x}$

Demostración

Se trabaja del segundo hacia el primer miembro, se sustituye $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ y realiza el cociente correspondiente:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\cos x}{\operatorname{ctg} x}$$

→

$$\operatorname{sen} x = \frac{\cos x}{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}$$

→

$$\operatorname{sen} x = \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\cos x}$$

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$$

Por tanto queda demostrada la identidad.

- 2 ••• Demuestra la siguiente identidad: $\operatorname{sen} \beta + \cos \beta \operatorname{ctg} \beta = \operatorname{csc} \beta$

Demostración

Para esta identidad se trabaja con el primer miembro para obtener el segundo.

$$\operatorname{sen} \beta + \cos \beta \operatorname{ctg} \beta = \operatorname{csc} \beta \quad \text{se utiliza la identidad del cociente } \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos \beta}{\operatorname{sen} \beta}$$

$$\operatorname{sen} \beta + \cos \beta \cdot \frac{\cos \beta}{\operatorname{sen} \beta} = \operatorname{csc} \beta \quad \text{se efectúa el producto.}$$

$$\operatorname{sen} \beta + \frac{\cos^2 \beta}{\operatorname{sen} \beta} = \operatorname{csc} \beta \quad \text{se realiza la suma fraccionaria.}$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta}{\operatorname{sen} \beta} = \operatorname{csc} \beta \quad \text{se sustituye la identidad pitagórica } \operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen} \beta} = \operatorname{csc} \beta \quad \text{se aplica } \frac{1}{\operatorname{sen} \beta} = \operatorname{csc} \beta$$

$$\operatorname{csc} \beta \equiv \operatorname{csc} \beta$$

Finalmente, queda demostrada la identidad.

- 3 ••• Demuestra la siguiente identidad:

$$\frac{\operatorname{csc} \alpha}{\tan \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \cos \alpha$$

Demostración

Se utiliza el primer miembro de la igualdad y se realizan los siguientes cambios:

$$\frac{\operatorname{csc} \alpha}{\tan \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}}{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}} = \cos \alpha$$

Se realiza la suma del denominador,

$$\frac{\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}}{\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha}} = \cos \alpha$$

Y posteriormente la división,

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha \cdot (\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} = \cos \alpha$$

Se sustituye $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha (1)} = \cos \alpha$$

Y finalmente se simplifica la fracción:

$$\cos \alpha \equiv \cos \alpha$$

4 ••• Demuestra la siguiente identidad:

$$\frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} = \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Demostración

Se utiliza el segundo miembro como base para la demostración:

$$\frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} = \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$\frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} = \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1 - \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}$$

Se multiplica por el conjugado del numerador.

$$\frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{(\cos x)(1 - \operatorname{sen} x)}$$

se reemplaza $1 - \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x$.

$$\frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} = \frac{\cos^2 x}{(\cos x)(1 - \operatorname{sen} x)}$$

se simplifica la fracción.

$$\frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} = \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$$

se demuestra la identidad.

5 ••• Demuestra la siguiente identidad:

$$2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$$

Demostración

En este caso se utiliza el primer miembro para obtener el segundo.

$$2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$$

Se utiliza la identidad $1 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$.

$$2\cos^2 x - (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$$

$$2\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$$

se simplifican términos semejantes.

$$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$$

se emplea $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$.

$$1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$$

$$1 - 2\operatorname{sen}^2 x \equiv 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$$

Por lo que la identidad queda demostrada.

6 ••• Demuestra la siguiente identidad:

$$\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$$

Solución

Se utiliza el lado izquierdo para demostrar la identidad:

$$\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} \quad \text{Se emplea la identidad } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} \quad \text{se factoriza denominador y numerador}$$

$$\frac{(\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha)}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2} = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} \quad \text{se simplifica la fracción}$$

$$\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} \quad \text{se divide entre } \cos \alpha \text{ numerador y denominador.}$$

$$\frac{\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} \quad \rightarrow \quad \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$$

EJERCICIO 42

Demuestra las siguientes identidades:

1. $\sin x (1 + \cot x) = \sin x + \cos x$
2. $(1 + \tan^2 x) \cos x = \sec x$
3. $\left(\frac{\sin x}{\tan x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\csc x}\right)^2 = 1$
4. $(\sec x + \sin^2 x + \cos^2 x)(\sec x - 1) = \tan^2 x$
5. $\csc \theta (1 - \cos^2 \theta) = \sin \theta$
6. $\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\cos \alpha} = \csc \alpha$
7. $\frac{1 - \sin^2 \phi}{\sec^2 \phi} = \cos^4 \phi$
8. $\operatorname{ctg}^2 y - \cos^2 y = \operatorname{ctg}^2 y \cos^2 y$
9. $\sec y = \frac{\operatorname{ctg} y + \tan y}{\csc y}$
10. $\frac{1 + \cos \omega}{\sin \omega} = \frac{\sin \omega}{1 - \cos \omega}$
11. $\sec \beta \cdot \sin \beta \cdot \operatorname{ctg} \beta = 1$

12. $\operatorname{ctg} x - \tan x = \frac{2 \cos^2 x - 1}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}$
13. $2 \csc^2 y = \frac{1}{1 - \cos y} + \frac{1}{1 + \cos y}$
14. $\frac{1}{\csc \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \csc \alpha - \operatorname{ctg} \alpha$
15. $3 \operatorname{sen}^2 x - 9 \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{ctg} x + 7 \cos^2 x - 4 \cos x = (4 \cos x - 1)(\cos x - 3)$
16. $\cos^2 x + \frac{\tan^2 x}{1 + \sec x} + \operatorname{sen}^2 x = \sec x$
17. $\cos^4 x + \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = 1$
18. $\sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{1 + \cos \beta}} + \sqrt{\frac{1 + \cos \beta}{1 - \cos \beta}} = 2 \csc \beta$
19. $\cos x (2 \sec x + \tan x)(\sec x - 2 \tan x) = 2 \cos x - 3 \tan x$
20. $1 + \frac{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{ctg}^2 x}{1 + \operatorname{sen} x} = \csc x$
21. $2(\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x) - 3(\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x) + 1 = 0$
22. $\operatorname{sen} x (1 + \operatorname{ctg} x) = \cos^3 x (1 + \tan x) + \operatorname{sen}^3 x (1 + \operatorname{ctg} x)$
23. $(\csc x - \operatorname{sen} x)^2 + (\sec x - \cos x)^2 = \tan^2 x + \operatorname{ctg}^2 x - 1$
24. $\frac{2 - \csc^2 x}{\tan x - 1} - \csc^2 x + 1 = \operatorname{ctg} x$
25. $\frac{\tan x + \operatorname{ctg} x}{\csc x - \operatorname{sen} x} = \sec^3 x$
26. $\frac{\cos x - \sec x}{\operatorname{sen} x - \csc x} = \sec x (\sec^2 x - 1) \operatorname{sen} x$
27. $\sec^3 x = \frac{\sec^3 x - \sec x \tan^2 x}{(1 - \operatorname{sen} x)(1 + \operatorname{sen} x)}$
28. $\operatorname{sen}^2 x + \tan^2 x + \cos^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
29. $\sec^2 x + \csc^2 x = (\csc x \sec x)^2$
30. $\sec^2 x \equiv \operatorname{sen} x \csc x + \operatorname{sen} x (\operatorname{sen} x \sec^2 x)$
31. $\frac{1}{\csc x + \operatorname{ctg} x} - \frac{1}{\operatorname{ctg} x - \csc x} = \frac{2}{\operatorname{sen} x}$
32. $1 - \operatorname{ctg} x = \sqrt{(\csc^2 x - 2 \operatorname{ctg} x)}$

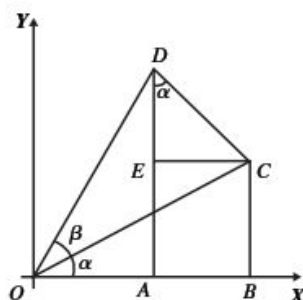


Este ejercicio no tiene soluciones al final del libro por ser demostraciones.

Obtención de las identidades trigonométricas de la suma y la diferencia de ángulos

Considerando que $\overline{OB} \perp \overline{BC}$, $\overline{OC} \perp \overline{DC}$, se realiza una proyección de $\overline{OD}$ con el eje X y $\overline{OA} \perp \overline{AD}$, $\overline{DE} \perp \overline{CE}$, donde $\overline{AE} = \overline{BC}$, así como $\overline{AB} = \overline{CE}$

Para obtener $\text{sen}(\alpha + \beta)$



$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \frac{\overline{AD}}{\overline{OD}} \text{ pero } \overline{AD} = \overline{AE} + \overline{ED};$$

entonces,

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \frac{\overline{AE} + \overline{ED}}{\overline{OD}} \quad \text{sen}(\alpha + \beta) = \frac{\overline{AE}}{\overline{OD}} + \frac{\overline{ED}}{\overline{OD}}$$

Para obtener las funciones trigonométricas de los ángulos α y β

$$\text{sen } \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} \dots(1)$$

$$\text{sen } \beta = \frac{\overline{CD}}{\overline{OD}} \dots(3)$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{CD}} \dots(2)$$

$$\cos \beta = \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} \dots(4)$$

Si se realiza el producto de (1) y (4); (2) y (3) se tiene:

$$(\text{sen } \alpha)(\cos \beta) = \frac{\overline{AE}}{\overline{OC}} \cdot \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{OD}} \dots(5)$$

$$(\text{sen } \beta)(\cos \alpha) = \frac{\overline{CD}}{\overline{OD}} \cdot \frac{\overline{ED}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{OD}} \dots(6)$$

Al sumar (5) y (6):

$$(\text{sen } \alpha)(\cos \beta) + (\text{sen } \beta)(\cos \alpha) = \frac{\overline{AE}}{\overline{OD}} + \frac{\overline{ED}}{\overline{OD}};$$

Se obtiene $\text{sen}(\alpha + \beta)$, entonces:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = (\text{sen } \alpha)(\cos \beta) + (\text{sen } \beta)(\cos \alpha)$$

Para obtener $\cos(\alpha + \beta)$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{\overline{OA}}{\overline{OD}}; \quad \text{pero} \quad \overline{OA} = \overline{OB} - \overline{AB};$$

entonces,

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{\overline{OB} - \overline{AB}}{\overline{OD}} \quad \cos(\alpha + \beta) = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} - \frac{\overline{AB}}{\overline{OD}}$$

Si se realiza el producto de (2) y (4); (1) y (3) se tiene:

$$(\cos \alpha)(\cos \beta) = \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} \cdot \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} \dots (7)$$

$$(\sin \alpha)(\sin \beta) = \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OD}} \dots (8)$$

Al restar (8) de (7):

$$(\cos \alpha)(\cos \beta) - (\sin \alpha)(\sin \beta) = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} - \frac{\overline{AB}}{\overline{OD}};$$

Se obtiene $\cos(\alpha + \beta)$

$$\cos(\alpha + \beta) = (\cos \alpha)(\cos \beta) - (\sin \alpha)(\sin \beta)$$

Para obtener $\tan(\alpha + \beta)$, se emplean identidades básicas:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}; \quad \tan(\alpha + \beta) = \frac{(\sin \alpha)(\cos \beta) + (\sin \beta)(\cos \alpha)}{(\cos \alpha)(\cos \beta) - (\sin \alpha)(\sin \beta)}$$

Si se divide entre $(\cos \alpha)(\cos \beta) \neq 0$, entonces,

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\frac{(\sin \alpha)(\cos \beta) + (\sin \beta)(\cos \alpha)}{(\cos \alpha)(\cos \beta)}}{\frac{(\cos \alpha)(\cos \beta) - (\sin \alpha)(\sin \beta)}{(\cos \alpha)(\cos \beta)}} = \frac{\frac{(\sin \alpha)(\cos \beta)}{(\cos \alpha)(\cos \beta)} + \frac{(\sin \beta)(\cos \alpha)}{(\cos \alpha)(\cos \beta)}}{\frac{(\cos \alpha)(\cos \beta)}{(\cos \alpha)(\cos \beta)} - \frac{(\sin \alpha)(\sin \beta)}{(\cos \alpha)(\cos \beta)}}; \\ \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\frac{(\sin \alpha)}{(\cos \alpha)} + \frac{(\sin \beta)}{(\cos \beta)}}{1 - \frac{(\sin \alpha)}{(\cos \alpha)} \cdot \frac{(\sin \beta)}{(\cos \beta)}} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} \end{aligned}$$

Finalmente se deduce que:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

Para obtener las identidades trigonométricas de la diferencia se emplean las identidades de los ángulos negativos en función de ángulos positivos, es decir:

$$\sin(-x) = -\sin(x) \quad \cos(-x) = \cos(x) \quad \tan(-x) = -\tan(x)$$

Por tanto:

$$\sin(\alpha + \beta) = (\sin \alpha)(\cos \beta) + (\sin \beta)(\cos \alpha)$$

Se cambia β por $-\beta$ y se obtiene:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= (\sin \alpha)(\cos(-\beta)) + (\sin(-\beta))(\cos \alpha) \\ \sin(\alpha - \beta) &= (\sin \alpha)(\cos \beta) - (\sin \beta)(\cos \alpha) \end{aligned}$$

De una manera semejante se realiza la diferencia para las demás funciones trigonométricas y se obtiene:

$$\cos(\alpha - \beta) = (\cos \alpha)(\cos \beta) + (\sin \alpha)(\sin \beta)$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

Resumen de fórmulas

Identidades trigonométricas de la suma de ángulos:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = (\operatorname{sen} \alpha)(\cos \beta) + (\operatorname{sen} \beta)(\cos \alpha)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = (\cos \alpha)(\cos \beta) - (\operatorname{sen} \alpha)(\operatorname{sen} \beta)$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

Identidades trigonométricas de la diferencia de ángulos:

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = (\operatorname{sen} \alpha)(\cos \beta) - (\operatorname{sen} \beta)(\cos \alpha)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = (\cos \alpha)(\cos \beta) + (\operatorname{sen} \alpha)(\operatorname{sen} \beta)$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

Valor de una función trigonométrica para la suma y la diferencia de ángulos

Los valores de las funciones trigonométricas de ángulos notables se emplean para obtener el valor de una función cuyo ángulo se pueda descomponer en una suma o diferencia.

EJEMPLOS

Ejemplos

- 1 •• Obtén el valor de $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)$.

Solución

Al aplicar la identidad para el seno de la suma de ángulos, se determina que:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) &= \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

- 2 •• Calcula el valor exacto de $\tan(90^\circ - 60^\circ)$.

Solución

Se aplica la identidad de la tangente de la diferencia de ángulos y se obtiene:

$$\tan(90^\circ - 60^\circ) = \frac{\tan 90^\circ - \tan 60^\circ}{1 + \tan 90^\circ \tan 60^\circ}$$

La $\tan 90^\circ$ no está definida, por consiguiente, se multiplica la identidad $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$ por la unidad expresada como $1 = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha}$

$$\tan(\alpha - \beta) = \left(\frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right) \left(\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} \right) = \frac{\tan \alpha \operatorname{ctg} \alpha - \tan \beta \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha + \tan \alpha \tan \beta \operatorname{ctg} \alpha}$$

Por identidades $\tan \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1$, entonces:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{1 - \tan \beta \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha + 1(\tan \beta)} = \frac{1 - \tan \beta \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha + \tan \beta}$$

Sustituyendo $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 60^\circ$ y posteriormente los valores de $\operatorname{ctg} 90^\circ = 0$ y $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$, se obtiene como resultado:

$$\tan(90^\circ - 60^\circ) = \frac{1 - \tan 60^\circ \operatorname{ctg} 90^\circ}{\operatorname{ctg} 90^\circ + \tan 60^\circ} = \frac{1 - (\sqrt{3})(0)}{0 + \sqrt{3}} = \frac{1 - 0}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

3 ••• Expresa en función de x la identidad $\cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right)$

Solución

Se aplica la identidad del coseno de la diferencia de ángulos:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Se obtiene:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) &= \cos\frac{3}{2}\pi \cos x + \sin\frac{3}{2}\pi \sin x = (0) \cos x + (-1) \sin x \\ &= 0 - \sin x \\ &= -\sin x\end{aligned}$$

Resulta que, $\cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = -\sin x$

EJERCICIO 43

Aplica las identidades de suma o diferencias de ángulos y determina el valor de las siguientes funciones trigonométricas:

1. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$

5. $\sec\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

9. $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \pi\right)$

2. $\cos\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

6. $\cos(270^\circ - 45^\circ)$

10. $\cotg\left(2\pi - \frac{7}{4}\pi\right)$

3. $\sin(45^\circ + 60^\circ)$

7. $\cotg\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$

4. $\tan(45^\circ + 90^\circ)$

8. $\csc\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}\right)$

Expresa en función del ángulo indicado las siguientes expresiones:

11. $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$

15. $\csc\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$

19. $\tan(3\pi - \alpha)$

12. $\cos\left(\frac{3}{4}\pi - x\right)$

16. $\cotg\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)$

20. $\sin\left(\frac{3}{4}\pi - \theta\right)$

13. $\sin(2\pi + \beta)$

17. $\cos\left(x - \frac{8}{3}\pi\right)$

14. $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

18. $\sec(\pi + 2\omega)$

➡ Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente.

Aplicación de las funciones trigonométricas de la suma y la diferencia de ángulos

Para determinar el valor de una función trigonométrica de determinados ángulos, éstos se descomponen como la suma o la diferencia de dos ángulos notables.

EJEMPLOS

- 1 •• Determina el $\cos 75^\circ$ y expresa 75° como una suma de ángulos notables.

Solución

El ángulo de 75° , como la suma de ángulos notables, es $75^\circ = 30^\circ + 45^\circ$

Entonces,

$$\cos 75^\circ = \cos (30^\circ + 45^\circ)$$

Se emplea la identidad $\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

$$\cos (75^\circ) = \cos (30^\circ + 45^\circ) = (\cos 30^\circ)(\cos 45^\circ) - (\sin 30^\circ)(\sin 45^\circ)$$

Al sustituir el valor de cada función trigonométrica, se determina que:

$$\cos 75^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Por tanto, $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

- 2 •• Determina $\tan 15^\circ$ y expresa 15° como una diferencia de ángulos notables.

Solución

El ángulo de 15° se expresa como $60^\circ - 45^\circ$, entonces:

$$\tan (15^\circ) = \tan (60^\circ - 45^\circ)$$

Se emplea la identidad $\tan (\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$ en la que se sustituyen los valores de los ángulos $\alpha = 60^\circ$ y $\beta = 45^\circ$,

$$\tan (15^\circ) = \tan (60^\circ - 45^\circ) = \frac{\tan 60^\circ - \tan 45^\circ}{1 + \tan 60^\circ \cdot \tan 45^\circ}$$

Se sustituyen los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos notables:

$$\tan (15^\circ) = \tan (60^\circ - 45^\circ) = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + (\sqrt{3})(1)} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

Al racionalizar el denominador, se obtiene:

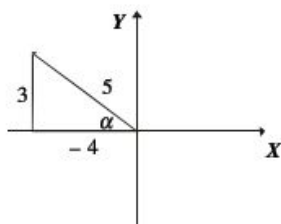
$$\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$$

- 3 •• Calcula las funciones trigonométricas básicas de $(\alpha + \beta)$ si sabes que $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ para $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ y $\tan \beta = \frac{5}{12}$ para $\pi \leq \beta \leq \frac{3\pi}{2}$.

Solución

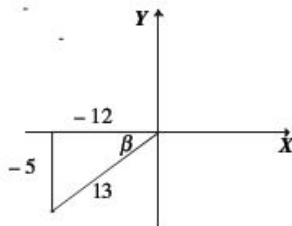
Se obtienen las funciones de los ángulos α y β , con el teorema de Pitágoras y se respetan los signos de las funciones en los cuadrantes indicados.

Para $\sin \alpha$, el segundo cuadrante



Funciones del ángulo α : $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ y $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$

Para $\tan \beta$, el tercer cuadrante



Funciones del ángulo β : $\sin \beta = -\frac{5}{13}$, $\cos \beta = -\frac{12}{13}$ y $\tan \beta = \frac{5}{12}$

Por consiguiente, estos valores se sustituyen en las identidades de sumas de ángulos.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= (\operatorname{sen} \alpha)(\cos \beta) + (\operatorname{sen} \beta)(\cos \alpha) = \left(\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) + \left(-\frac{5}{13}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \\ &= -\frac{36}{65} + \frac{20}{65} = -\frac{16}{65} \\ \cos(\alpha + \beta) &= (\cos \alpha)(\cos \beta) - (\operatorname{sen} \alpha)(\operatorname{sen} \beta) = \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) - \left(\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) \\ &= \frac{48}{65} + \frac{15}{65} = \frac{63}{65} \\ \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{\left(-\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{5}{12}\right)}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{5}{12}\right)} = \frac{-\frac{4}{12}}{\frac{63}{48}} = -\frac{16}{63}\end{aligned}$$

Por tanto, los resultados son:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = -\frac{16}{65}, \cos(\alpha + \beta) = \frac{63}{65} \text{ y } \tan(\alpha + \beta) = -\frac{16}{63}$$

4 •• Demuestra la siguiente identidad:

$$\operatorname{arc} \tan \frac{2\sqrt{t}}{t-1} - \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \sqrt{t} = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{t+1}}$$

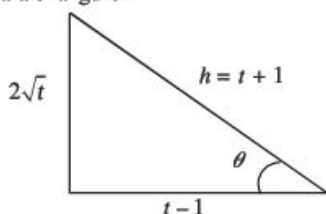
Solución

Sean $\theta = \operatorname{arc} \tan \frac{2\sqrt{t}}{t-1}$ y $\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \sqrt{t}$, entonces $\theta - \alpha = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{t+1}}$ que es la identidad a demostrar donde

$$\tan \theta = \frac{2\sqrt{t}}{t-1} \text{ y } \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{t}$$

Se construyen los triángulos respectivamente,

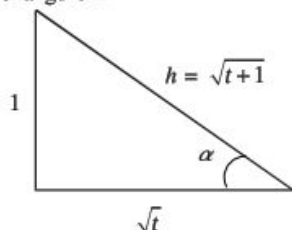
Para el ángulo θ



Por el teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned}h^2 &= (2\sqrt{t})^2 + (t-1)^2 \\ h &= \sqrt{4t + t^2 - 2t + 1} \\ h &= \sqrt{t^2 + 2t + 1} \\ h &= \sqrt{(t+1)^2} = t+1\end{aligned}$$

Para el ángulo α



Por el teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned}h^2 &= (\sqrt{t})^2 + (1)^2 \\ h &= \sqrt{t+1}\end{aligned}$$

Se realiza la demostración aplicando seno a $(\theta - \alpha)$

$$\operatorname{sen}(\theta - \alpha) = \operatorname{sen} \theta \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos \theta$$

Pero $\operatorname{sen} \theta = \frac{2\sqrt{t}}{t+1}$, $\cos \theta = \frac{t-1}{t+1}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t+1}}$ y $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{\sqrt{t+1}}$, entonces

$$\operatorname{sen}(\theta - \alpha) = \frac{2\sqrt{t}}{t+1} \cdot \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t+1}} - \frac{1}{\sqrt{t+1}} \cdot \frac{t-1}{t+1} = \frac{2t - t + 1}{(t+1)\sqrt{t+1}} = \frac{(t+1)}{(t+1)\sqrt{t+1}} = \frac{1}{\sqrt{t+1}}$$

Donde,

$$\operatorname{sen}(\theta - \alpha) = \frac{1}{\sqrt{t+1}} \quad \rightarrow \quad \theta - \alpha = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{t+1}}$$

Así queda demostrada la identidad.

EJERCICIO 44

Determina los valores de las siguientes funciones trigonométricas y expresa los ángulos como suma o diferencia:

- | | | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|----------------------|
| 1. $\tan 105^\circ$ | 3. $\csc 15^\circ$ | 5. $\tan 255^\circ$ | 7. $\tan 345^\circ$ | 9. $\csc 255^\circ$ |
| 2. $\cot 75^\circ$ | 4. $\sec 105^\circ$ | 6. $\cos 285^\circ$ | 8. $\sec 165^\circ$ | 10. $\sen 165^\circ$ |

11. Si $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ con $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ y $\tan \beta = \frac{2}{3}$ con $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$, halla $\sen(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$ y $\tan(\alpha + \beta)$.
12. Si $\tan \alpha = 1$ con $\pi \leq \alpha \leq \frac{3}{2}\pi$ y $\sec \beta = 2$ con $\frac{3}{2}\pi \leq \beta \leq 2\pi$, halla $\sen(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$ y $\tan(\alpha - \beta)$.
13. Si $\sec \alpha = -\frac{3}{2}$ con $\pi \leq \alpha \leq \frac{3}{2}\pi$ y $\ctg \beta = \sqrt{2}$ con $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$, halla las seis funciones trigonométricas de $(\alpha + \beta)$ y $(\alpha - \beta)$.

Demuestra las siguientes identidades:

14. $\left[\sen(\pi - x) + \sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right] [\sen x - \cos x] \equiv 1 - 2\cos^2 x$
15. $\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \cos(\pi - x) \right] - \left[\sen\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \right] \equiv 2\sen x$
16. $\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sen(\pi + x) \right] - \left[\cos(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \right] \equiv 3\sen x + \cos x$
17. $\frac{\sen\left(\beta - \frac{3\pi}{2}\right)}{\sec \beta} + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)}{\csc \beta} \equiv 1$
18. $\tan(\pi - \alpha) \cdot \sen\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \sen(\pi - \alpha) \equiv 1 - \cos^2 \alpha$
19. $[\sen \alpha - \sen \beta]^2 - 2\cos(\alpha + \beta) + [\cos \alpha + \cos \beta]^2 \equiv 2$
20. $\frac{\sec(\pi - \omega)}{\csc\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right)} + \frac{\sen(\pi + \omega)}{\cos(\pi + \omega)} \equiv \tan \omega - 1$
21. $\csc(\pi - y) + \frac{\cos(\pi + y)}{\tan(\pi + y)} \equiv \sen y$
22. $\frac{\csc\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} - \frac{\tan(\pi - x)}{\sen x} \equiv \sec x \cdot (\csc x + 1)$
23. $\left[\sen(x + 2\pi) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right]^2 + \frac{4\cos(x - 2\pi)}{\csc\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \equiv 4$
24. $\frac{\sen(\alpha + \beta + \gamma) + \sen(\alpha - \beta - \gamma)}{\cos(\alpha + \beta + \gamma) + \cos(\alpha - \beta - \gamma)} \equiv \tan \alpha$

$$25. \operatorname{sen}(\theta + \omega) \cdot \operatorname{sen}(\theta - \omega) \equiv (\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} \omega)(\operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} \omega)$$

$$26. \tan\left(\frac{\pi}{4} + \delta\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) \equiv -\frac{2}{\operatorname{sen}^2 \delta - \cos^2 \delta}$$

$$27. 4 \operatorname{arc} \tan\left(-\frac{3}{2}\right) + \pi \equiv 4 \operatorname{arc} \tan\left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$28. \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{\pi}{2} \equiv -\operatorname{sen}^{-1} \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$29. \cos^{-1} \frac{12}{13} - \cos^{-1} \frac{33}{65} \equiv -\operatorname{sen}^{-1} \frac{3}{5}$$

$$30. \operatorname{sec}^{-1} \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{t} - \operatorname{tg}^{-1} t \equiv 0, t > 0$$

$$31. \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} - \operatorname{arc} \cos \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \equiv -\operatorname{arc} \tan \frac{1}{t}, t > 0$$

$$32. \operatorname{sen}^{-1} \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} + \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \equiv \operatorname{sen}^{-1}(1), t > 0$$

$$33. \operatorname{sen}^{-1} \sqrt{\frac{t}{t+1}} - \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{\sqrt{t+1}} \equiv \operatorname{sen}^{-1} \frac{t-1}{t+1}, t \geq 1$$

$$34. \operatorname{arc} \tan s - \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} \equiv \operatorname{arc} \tan \frac{s - t}{1 + st}, s > 0 \text{ y } t > 0$$



Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente.

Funciones trigonométricas del ángulo doble

Estas funciones se obtienen a partir de las identidades de la suma de ángulos, como se muestra a continuación:

Seno del ángulo doble $\operatorname{sen}(2\alpha)$

Para obtener el $\operatorname{sen}(2\alpha)$ se emplea la identidad $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ donde $\beta = \alpha$

Entonces:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = (\operatorname{sen} \alpha)(\cos \beta) + (\operatorname{sen} \beta)(\cos \alpha)$$

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = (\operatorname{sen} \alpha)(\cos \alpha) + (\operatorname{sen} \alpha)(\cos \alpha)$$

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2(\operatorname{sen} \alpha)(\cos \alpha)$$

Coseno del ángulo doble $\cos(2\alpha)$

Para obtener $\cos(2\alpha)$ se emplea la identidad $\cos(\alpha + \beta)$ donde $\beta = \alpha$

Entonces:

$$\cos(\alpha + \beta) = (\cos \alpha)(\cos \beta) - (\operatorname{sen} \alpha)(\operatorname{sen} \beta)$$

$$\cos(2\alpha) = (\cos \alpha)(\cos \alpha) - (\operatorname{sen} \alpha)(\operatorname{sen} \alpha)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha \text{ (con el empleo de identidades trigonométricas básicas)}$$

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1$$

Tangente del ángulo doble $\tan(2\alpha)$

Para obtener $\tan(2\alpha)$ se emplea la identidad $\tan(\alpha + \beta)$ donde $\beta = \alpha$

Entonces:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \alpha}$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

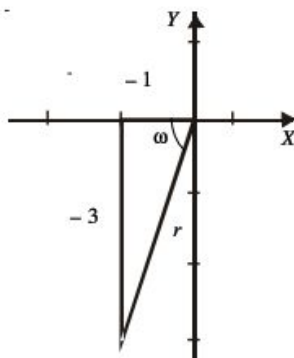
EJEMPLOS

Ejemplos

- 1 •• Obtén las funciones trigonométricas de (2ω) , si se sabe que $\tan \omega = 3$, para $\pi \leq \omega \leq \frac{3\pi}{2}$

Solución

En este caso el ángulo ω se encuentra en el tercer cuadrante, entonces: $\tan \omega = \frac{-3}{-1}$



Por el teorema de Pitágoras

$$r^2 = (-1)^2 + (-3)^2$$

$$r^2 = 1 + 9$$

$$r = \sqrt{10}$$

Se obtienen las funciones trigonométricas de ω :

$$\sin \omega = -\frac{3}{\sqrt{10}} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}, \quad \cos \omega = -\frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10} \quad \text{y} \quad \tan \omega = \frac{-3}{-1} = 3$$

Por tanto,

$$\sin 2\omega = 2(\sin \omega)(\cos \omega) = 2\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right) = \frac{(6)(10)}{100} = \frac{3}{5}$$

$$\cos 2\omega = \cos^2 \omega - \sin^2 \omega = \left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2 - \left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)^2 = \frac{10 - 90}{100} = -\frac{4}{5}$$

$$\tan 2\omega = \frac{2\tan \omega}{1 - \tan^2 \omega} = \frac{2 \cdot (3)}{1 - (3)^2} = \frac{6}{-8} = -\frac{3}{4}$$

- 2 •• Demuestra la siguiente identidad:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$$

Demostración

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x) = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$$

$$(1)(\sin^4 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x) = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$$

$$\sin^4 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x + 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$$

$$(\sin^4 x + 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x) - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$$

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$$

$$1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x \quad (\text{pero } \sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x)$$

$$1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x \equiv 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$$

3 ••• Demuestra la siguiente identidad:

$$\frac{1 + \cos 2x}{\operatorname{ctg} x} = \operatorname{sen} 2x$$

Demostración

Se inicia con la sustitución de las siguientes identidades:

$$1 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \quad \text{y} \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Se realizan las operaciones correspondientes y se simplifica:

$$\frac{1 + \cos 2x}{\operatorname{ctg} x} = \frac{(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) + (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)}{\operatorname{ctg} x} = \frac{2\cos^2 x}{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = \frac{2\cos^2 x \operatorname{sen} x}{\cos x} = 2\operatorname{sen} x \cos x$$

Pero $2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x$, por consiguiente se comprueba la igualdad:

$$\frac{1 + \cos 2x}{\operatorname{ctg} x} = \operatorname{sen} 2x$$

Funciones trigonométricas de la mitad de un ángulo

Seno de la mitad de un ángulo: $\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)$

Para obtener el $\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)$, se emplea la identidad $\cos(2\alpha) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 \alpha$, entonces se realiza el cambio $\alpha = \frac{\omega}{2}$

$$\cos\left(2 \cdot \frac{\omega}{2}\right) = 1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad \rightarrow \quad \cos \omega = 1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Se despeja $\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)$, resultando $\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos \omega}{2}}$

Coseno de la mitad de un ángulo: $\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)$

Para obtener $\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)$, se emplea la identidad $\cos(2\alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1$

Entonces se realiza el cambio $\alpha = \frac{\omega}{2}$

$$\cos\left(2 \cdot \frac{\omega}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - 1 \quad \rightarrow \quad \cos \omega = 2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - 1$$

Se despeja $\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)$, resultando $\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos \omega}{2}}$

Tangente de la mitad de un ángulo: $\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$

Para obtener $\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$, se emplean identidades trigonométricas básicas:

$$\tan\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\frac{1 - \cos \omega}{2}}}{\sqrt{\frac{1 + \cos \omega}{2}}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \omega}{1 + \cos \omega}}$$

Al racionalizar el denominador:

$$\tan\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\frac{(1-\cos\omega) \cdot (1-\cos\omega)}{(1+\cos\omega) \cdot (1-\cos\omega)}} = \sqrt{\frac{(1-\cos\omega)^2}{1-\cos^2\omega}} = \sqrt{\frac{(1-\cos\omega)^2}{\sin^2\omega}} = \frac{1-\cos\omega}{\sin\omega}$$

Por tanto:

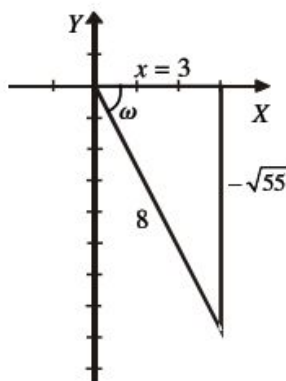
$$\tan\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\omega}{1+\cos\omega}} = \frac{1-\cos\omega}{\sin\omega}$$

EJEMPLOS

- 1 •• Obtén las funciones trigonométricas básicas de $\left(\frac{\omega}{2}\right)$ si se sabe que: $\sin\omega = -\frac{\sqrt{55}}{8}$ para $270^\circ \leq \omega \leq 360^\circ$.

Solución

Se ubica el ángulo ω en el cuarto cuadrante:



Por el teorema de Pitágoras

$$(8)^2 = (x)^2 + (-\sqrt{55})^2$$

$$64 = x^2 + 55$$

$$64 - 55 = x^2$$

$$x = \sqrt{9}$$

$$x = 3$$

Se obtienen las funciones trigonométricas del ángulo ω :

$$\sin\omega = -\frac{\sqrt{55}}{8} \quad \cos\omega = \frac{3}{8} \quad \tan\omega = -\frac{\sqrt{55}}{3}$$

De acuerdo con el resultado anterior, las funciones trigonométricas del ángulo $\left(\frac{\omega}{2}\right)$ son:

$$\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\omega}{2}} = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{3}{8}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{5}{8}}{2}} = \sqrt{\frac{5}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\omega}{2}} = \sqrt{\frac{1+\left(\frac{3}{8}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{11}{8}}{2}} = \sqrt{\frac{11}{16}} = \frac{\sqrt{11}}{4}$$

$$\tan\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1-\cos\omega}{\sin\omega} = \frac{1-\left(\frac{3}{8}\right)}{\left(-\frac{\sqrt{55}}{8}\right)} = \frac{\frac{5}{8}}{-\frac{\sqrt{55}}{8}} = -\frac{5}{\sqrt{55}} = -\frac{\sqrt{55}}{11}$$

- 2 ●●● Obtén el valor de las funciones trigonométricas básicas del ángulo de 15° , haciendo $15^\circ = \frac{30^\circ}{2}$

Solución

a) Para hallar el valor de $\text{sen } 15^\circ$ se utiliza la siguiente fórmula:

$$\text{sen} \left(\frac{\omega}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - \cos \omega}{2}}$$

Entonces,

$$\text{sen } 15^\circ = \text{sen} \left(\frac{30^\circ}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

Por tanto:

$$\text{sen } 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

b) Para hallar el valor de $\cos 15^\circ$ se utiliza la siguiente fórmula:

$$\cos \left(\frac{\omega}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 + \cos \omega}{2}}$$

Entonces,

$$\cos 15^\circ = \cos \left(\frac{30^\circ}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

Por tanto,

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

c) Para hallar el valor de $\tan 15^\circ$ se utiliza la siguiente fórmula:

$$\tan \left(\frac{\omega}{2} \right) = \frac{1 - \cos \omega}{\text{sen } \omega}$$

Entonces,

$$\tan 15^\circ = \tan \left(\frac{30^\circ}{2} \right) = \frac{1 - \cos 30^\circ}{\text{sen } 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{1}$$

Por consiguiente,

$$\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$$

3 ••• Demuestra la siguiente identidad:

$$\frac{\cos \alpha - \cos 2\alpha}{\sin \alpha + \sin 2\alpha} \equiv \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

Demostración

Se aplican las identidades del doble del ángulo

$$\frac{\cos \alpha - \cos 2\alpha}{\sin \alpha + \sin 2\alpha} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \quad \rightarrow \quad \frac{\cos \alpha - (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{\sin \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{\cos \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{\cos \alpha - \cos^2 \alpha + 1 - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{1 + \cos \alpha - 2\cos^2 \alpha}{\sin \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

Se realiza una factorización tanto en el numerador como en el denominador,

$$\frac{1 + \cos \alpha - 2\cos^2 \alpha}{\sin \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{(1 - \cos \alpha)(1 + 2\cos \alpha)}{\sin \alpha(1 + 2\cos \alpha)} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Se aplican identidades básicas con el nuevo resultado,

$$\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sqrt{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)}} = \frac{\sqrt{1 - \cos \alpha}}{\sqrt{1 + \cos \alpha}} = \frac{\frac{\sqrt{1 - \cos \alpha}}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{1 + \cos \alpha}}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

Pero $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$ y $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$, entonces se demuestra la igualdad

$$\frac{\cos \alpha - \cos 2\alpha}{\sin \alpha + \sin 2\alpha} \equiv \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

EJERCICIO 45

1. Utiliza las identidades del ángulo mitad para obtener las funciones trigonométricas de los ángulos $\frac{\pi}{8}$, $\frac{3}{8}\pi$, $\frac{5}{8}\pi$ y $\frac{7}{8}\pi$.
2. Obtén las funciones trigonométricas de (2α) y $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, si se sabe que $\csc \alpha = 4$ para $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$.
3. Si se sabe que $\tan \beta = \frac{12}{5}$, para $\pi \leq \beta \leq \frac{3}{2}\pi$, halla las funciones trigonométricas de (2β) y $\left(\frac{\beta}{2}\right)$.
4. Dada la función trigonométrica $\cos \omega = \frac{5}{8}$ donde $\frac{3}{2}\pi \leq \omega \leq 2\pi$, encuentra las funciones trigonométricas de (2ω) y $\left(\frac{\omega}{2}\right)$.
5. Obtén las funciones trigonométricas de (2α) y $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ si se sabe que: $\sec \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{2}$ para $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$.
6. Si $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}$ y $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$, determina $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ y $\tan \alpha$.
7. Si $\cos 2\beta = \frac{15}{17}$ y $\pi \leq \beta \leq \frac{3}{2}\pi$, encuentra las funciones trigonométricas de β y $\frac{\beta}{2}$.
8. Si $\sin \frac{1}{4}\alpha = \sqrt{\frac{10-\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{20}}$, determina las funciones trigonométricas de α si $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.
9. Si $\csc \frac{1}{4}\beta = \sqrt{\frac{6}{3-\sqrt{6}}}$ y $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$, halla las funciones trigonométricas de β y $\frac{\beta}{2}$.
10. Si $\operatorname{ctg} \frac{\omega}{2} = -3$ y $\frac{3}{2}\pi \leq \omega \leq 2\pi$, halla las funciones trigonométricas de ω , 2ω y 4ω .

Demuestra las siguientes identidades:

11. $\frac{2}{1 + \cos \alpha} = \sec^2 \frac{\alpha}{2}$
12. $[\cos 2x - \sin 2x]^2 - 1 = \sin(-4x)$
13. $\cos 8x + \cos 4x = 2\cos 2x - 4\sin^2 3x \cdot \cos 2x$
14. $\sin 4x + \sin 6x = 2(\sin 5x \cdot \cos x)$
15. $\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \omega \right) = \frac{1 + \sin 2\omega}{\cos 2\omega}$
16. $\cos^8 \beta - \sin^8 \beta = \frac{1}{4} \cos 2\beta \cdot (3 + \cos 4\beta)$
17. $\sqrt{2} \sec \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{2(\sin \alpha + \cos \alpha)}{1 + \sin 2\alpha}$
18. $\cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ \cos 96^\circ = -\frac{1}{16}$
19. $\frac{\cos^3 x - \sin^3 x}{\cos 2x} = \cos x - \frac{\sin 2x}{2(\sin x + \cos x)} + \sin x$

$$20. \frac{1}{1 + \operatorname{sen} \varphi} = \frac{1 + \tan^2 \frac{\varphi}{2}}{\left(\tan^2 \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right)^2}$$

$$21. 2 \left[\cos \frac{y}{2} - \operatorname{sen} \frac{y}{2} \right] \cdot \left[\operatorname{sen} \frac{y}{2} + \cos \frac{y}{2} \right] \cos x = \cos(x+y) + \cos(x-y)$$

$$22. \operatorname{sen}(x+2y) - \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} y \cdot \cos(x+y)$$

$$23. 4 \csc^2 \beta \cdot \cos \beta = \operatorname{ctg}^2 \frac{\beta}{2} - \tan^2 \frac{\beta}{2}$$

$$24. \left[3 \cos \frac{\theta}{2} - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right] \cdot \left[\cos \frac{\theta}{2} + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right] = 2 \cos \theta + \operatorname{sen} \theta + 1$$

$$25. \operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \operatorname{sen}^2 2x$$

➔ Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Identidades trigonométricas para transformar un producto en suma o resta

De las identidades:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x+y) &= (\operatorname{sen} x)(\cos y) + (\operatorname{sen} y)(\cos x) \text{ se realiza la suma con} \\ + \operatorname{sen}(x-y) &= (\operatorname{sen} x)(\cos y) - (\operatorname{sen} y)(\cos x) \\ \hline \operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y) &= 2(\operatorname{sen} x)(\cos y) \end{aligned}$$

Al despejar,

$$(\operatorname{sen} x)(\cos y) = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)]$$

De forma semejante se obtiene:

$$(\cos x)(\operatorname{sen} y) = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y)]$$

De las identidades:

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= (\cos x)(\cos y) - (\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} y) \text{ se realiza la suma con} \\ + \cos(x-y) &= (\cos x)(\cos y) + (\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} y) \\ \hline \cos(x+y) + \cos(x-y) &= 2(\cos x)(\cos y) \end{aligned}$$

Al despejar,

$$(\cos x)(\cos y) = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

De la misma manera se obtiene:

$$(\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} y) = -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)]$$

EJEMPLOS

- 1 ••• Expresa el siguiente producto en forma de suma o resta:

$$\cos(8x) \cos(2x)$$

Solución

Se emplea la identidad $(\cos x)(\cos y) = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$ y se obtiene:

$$\cos(8x) \cos(2x) = \frac{1}{2}[\cos(8x+2x) + \cos(8x-2x)]$$

$$\cos(8x) \cos(2x) = \frac{1}{2}[\cos(10x) + \cos(6x)]$$

- 2 ••• Encuentra el valor del siguiente producto:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

Solución

Se emplea la identidad $(\sin x)(\cos y) = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{12}\right)\right]$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{9\pi+ \pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{9\pi- \pi}{12}\right)\right]$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

Al sustituir el valor de las funciones trigonométricas de ángulos notables:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

EJERCICIO 46

Convierte los siguientes productos en sumas o diferencias de funciones trigonométricas:

- | | |
|--|--|
| 1. $\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)$ | 11. $4 \sin(3\alpha) \sin(\alpha)$ |
| 2. $\cos(45^\circ) \sin(60^\circ)$ | 12. $5 \cos(2\alpha) \sin(6\alpha)$ |
| 3. $\sin(y + \beta) \sin(y - \beta)$ | 13. $\cos(47^\circ) \sin(43^\circ)$ |
| 4. $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ | 14. $\cos\left(\frac{2}{3}\alpha\right) \cos\left(\frac{5}{3}\beta\right)$ |
| 5. $\sin(82^\circ 30') \cos(37^\circ 30')$ | 15. $3 \sin(9\alpha) \cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$ |
| 6. $\sin(37^\circ 30') \sin(7^\circ 30')$ | 16. $\sec\left(\frac{\pi}{3}\right) \sec\left(\frac{\pi}{6}\right)$ |
| 7. $\cos(x + \alpha) \sin(x - \alpha)$ | 17. $\tan 2\alpha \cot \alpha$ |
| 8. $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ | 18. $\sec\left(\frac{3}{4}\pi\right) \csc\left(\frac{\pi}{4}\right)$ |
| 9. $\sin(187^\circ 30') \cos(217^\circ 30')$ | 19. $\tan(x + a) \tan(x - a)$ |
| 10. $\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ | 20. $\frac{\sin(2\alpha + \beta)}{\sec(2\alpha - \beta)}$ |



Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Demostración de identidades

EJEMPLOS

1 •• Demuestra la siguiente igualdad: $\operatorname{sen} \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}$

Demostración

Se aplica la identidad $(\operatorname{sen} x)(\cos y) = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)]$

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \left[\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12} \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{12} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} + \operatorname{sen} 0 \right]$$

Pero $\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ y $\operatorname{sen} 0 = 0$, entonces:

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} + 0 \right] = \frac{1}{4}$$

Por tanto queda demostrada la igualdad.

2 •• Demuestra la siguiente expresión:

$$\operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x = \operatorname{sen}(x+y)$$

Demostración

Se aplica la transformación de productos a sumas y se obtiene:

$$\operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)]$$

$$\operatorname{sen} y \cos x = \cos x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y)]$$

Al sumar ambas expresiones:

$$\operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)] + \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y)]$$

$$\operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(x+y) + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(x-y) + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(x+y) - \frac{1}{2} \operatorname{sen}(x-y)$$

Se simplifican términos semejantes, entonces:

$$\operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x = \operatorname{sen}(x+y)$$

Por tanto, queda demostrada la igualdad.

EJERCICIO 47

Demuestra las siguientes igualdades:

$$1. \frac{1}{\sec 30^\circ \csc 120^\circ} = \frac{3}{4}$$

$$2. \frac{\sen 75^\circ \cos 45^\circ}{\sen 225^\circ \cos 75^\circ} = -2 - \sqrt{3}$$

$$3. \frac{\cos 35^\circ \sen 10^\circ + \cos 10^\circ \sen 35^\circ}{\cos 20^\circ \cos 10^\circ - \sen 20^\circ \sen 10^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$4. \frac{\tan \frac{\pi}{6} \tan \frac{5\pi}{12} + \tan \frac{\pi}{12} \tan \frac{5\pi}{12}}{1 - \tan \frac{\pi}{6} \tan \frac{\pi}{12}} = 2 + \sqrt{3}$$

$$5. \sen x \cos x + \cos 3x \sen x = \frac{1}{2} \sen 4x$$

$$6. \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \sen \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \left[\sen 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$7. \frac{\sen^2 \left(\frac{3}{2}\pi - x \right) \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{2} \right)}{\cos(2\pi - x) \cos^2 \left(\frac{3}{2}\pi - x \right) \sen^2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right)} = \sec x$$

$$8. \cos x [\cos 2x - 2\sen^2 x] = \cos 3x$$

$$9. \tan \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \tan \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = \frac{2 \cos 2x + 1}{2 \cos 2x - 1}$$

$$10. \sen(10^\circ + x) \cos(20^\circ - x) + \cos(80^\circ - x) \sen(70^\circ + x) = \sen(2x - 10^\circ)$$

$$11. \sen \left(\frac{2}{9}\pi + x \right) \cos \left(\frac{1}{18}\pi + x \right) - \sen \left(\frac{5}{18}\pi - x \right) \cos \left(\frac{4}{9}\pi - x \right) = \frac{1}{2}$$

$$12. \frac{\sen \left(\frac{\pi}{2} - x \right)}{\csc 2x} - \frac{\sen x}{\csc \left(\frac{3\pi}{2} + 2x \right)} = \sen 3x$$

$$13. \cos 2x + 2[\sen x \cos y + \cos x \sen y] \sen(x - y) = \cos 2y$$

$$14. \sen \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cdot \sen \left(\frac{3}{2}\pi - x \right) \cdot \cos(\pi - x) = \cos^3 x$$



Este ejercicio no tiene soluciones al final del libro por ser demostraciones ■

Identidades para transformar sumas o restas de funciones trigonométricas en un producto

Dados los ángulos x y y , tales que

$$x + y = \alpha \quad ; \quad x - y = \beta$$

Al resolver el sistema de ecuaciones para x y y se obtienen los siguientes resultados:

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad ; \quad y = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Estos valores angulares se sustituyen en la identidad:

$$(\operatorname{sen} x) (\cos y) = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)]$$

Y el resultado es:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \frac{1}{2} [\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta]$$

Ahora, al despejar la suma de los senos, se determina que:

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

De la misma manera se obtiene:

$$\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

EJEMPLOS

Ejemplos

- 1 •• Efectúa lo siguiente: $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}$

Solución

Al aplicar la transformación de diferencia de senos a productos, se obtiene:

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = 2 \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}}{2}\right); \text{ simplificando}$$

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = 2 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

2 ●●● Calcula, sin hacer uso de las tablas trigonométricas:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

Solución

Se emplea la identidad, $\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2 \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\frac{7\pi}{12} + \frac{5\pi}{12}}{2}\right) \cos\left(\frac{\frac{7\pi}{12} - \frac{5\pi}{12}}{2}\right) \right]$$

Se simplifica,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

Dado que $\frac{\pi}{12}$ no es un ángulo notable, se puede emplear la identidad:

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

Donde $\frac{\pi}{12} = \frac{\frac{\pi}{6}}{2}$, entonces,

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{6}}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= 2 \left[(1) \cdot \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right) \right] \\ \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \sqrt{2+\sqrt{3}} \end{aligned}$$

3 ●●● Simplifica la siguiente expresión: $\cos\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right)$

Solución

Se emplea la identidad, $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \right]$

$$\cos\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right) = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) + \left(\omega - \frac{\pi}{3}\right)}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) - \left(\omega - \frac{\pi}{3}\right)}{2}\right)$$

$$\cos\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right) = -2 \operatorname{sen}(\omega) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right) = -2 \operatorname{sen}(\omega) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\cos\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \cdot \operatorname{sen} \omega$$

4 ••• Simplifica la siguiente expresión: $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$

Solución

Al utilizar la identidad, $\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$, se obtiene:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos \frac{x}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos \frac{x}{2} \quad (1)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos \frac{x}{2}$$

EJERCICIO 48

Convierte en producto las siguientes sumas y restas de funciones trigonométricas:

1. $\operatorname{sen} 165^\circ + \operatorname{sen} 75^\circ$

9. $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

2. $\cos(7\beta) + \cos(-2\beta)$

10. $\cos\left(\beta + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\beta - \frac{\pi}{6}\right)$

3. $\operatorname{sen}(240^\circ) + \operatorname{sen}(120^\circ)$

11. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

4. $\cos(5\theta) - \cos(3\theta)$

12. $\operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)$

5. $\cos(37^\circ 29') + \cos(52^\circ 31')$

13. $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$

6. $\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{12}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)$

14. $\operatorname{sen}\left(\beta + \frac{\pi}{8}\right) + \operatorname{sen}\left(\beta - \frac{\pi}{8}\right)$

7. $\cos\left(\frac{5\pi}{18}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)$

15. $\operatorname{sen}\left(\frac{5}{8}\pi + \alpha\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{7}{8}\pi - \alpha\right)$

8. $\operatorname{sen} 35^\circ - \operatorname{sen} 25^\circ$

16. $\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$

➔ Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Demostración de identidades

EJEMPLOS

1 ••• Demuestra la siguiente igualdad: $\frac{\operatorname{sen} 50^\circ + \operatorname{sen} 10^\circ}{\cos 50^\circ + \cos 10^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Solución

Se aplica la suma de senos y cosenos

$$\frac{\operatorname{sen} 50^\circ + \operatorname{sen} 10^\circ}{\cos 50^\circ + \cos 10^\circ} = \frac{2 \left[\operatorname{sen} \frac{1}{2}(50^\circ + 10^\circ) \cos \frac{1}{2}(50^\circ - 10^\circ) \right]}{2 \left[\cos \frac{1}{2}(50^\circ + 10^\circ) \cos \frac{1}{2}(50^\circ - 10^\circ) \right]} = \frac{\operatorname{sen} 30^\circ \cos 20^\circ}{\cos 30^\circ \cos 20^\circ} = \tan 30^\circ$$

Pero $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, por lo que la igualdad queda demostrada.

2 ••• Demuestra la siguiente igualdad:

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 7x = 4 \operatorname{sen} 4x \cos 2x \cos x$$

Solución

Se agrupan dos a dos los sumandos

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 7x = (\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x) + (\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 7x)$$

Se aplica la transformación de suma de senos a productos

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x = 2 \left[\operatorname{sen} \frac{1}{2}(x + 3x) \cos \frac{1}{2}(x - 3x) \right] = 2 [\operatorname{sen} 2x \cos(-x)] = 2 \operatorname{sen} 2x \cos x$$

$$\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 7x = 2 \left[\operatorname{sen} \frac{1}{2}(5x + 7x) \cos \frac{1}{2}(5x - 7x) \right] = 2 [\operatorname{sen} 6x \cos(-x)] = 2 \operatorname{sen} 6x \cos x$$

Entonces,

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 7x = 2 \operatorname{sen} 2x \cos x + 2 \operatorname{sen} 6x \cos x = 2 \cos x (\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 6x)$$

En esta nueva expresión se aplica la transformación de sumas a productos,

$$\begin{aligned} 2 \cos x (\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 6x) &= 2 \cos x \cdot 2 \left[\operatorname{sen} \frac{1}{2}(2x + 6x) \cos \frac{1}{2}(2x - 6x) \right] \\ &= 4 \cos x [\operatorname{sen} 4x \cos(-2x)] \\ &= 4 \cos x \operatorname{sen} 4x \cos 2x \end{aligned}$$

Por tanto, queda demostrada la igualdad.

EJERCICIO 49

Demuestra las siguientes igualdades:

$$1. \cos \frac{5}{12}\pi + \cos \frac{11}{12}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2. \frac{\operatorname{sen} 40^\circ + \operatorname{sen} 20^\circ}{\operatorname{sen} 40^\circ - \operatorname{sen} 20^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{ctg} 10^\circ$$

$$3. \frac{\frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} + \operatorname{sen} \frac{5\pi}{18}}{\operatorname{sen} \frac{5\pi}{18} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}}}{\frac{\tan \frac{2\pi}{9}}{\tan \frac{\pi}{18}}} = \frac{\tan \frac{2\pi}{9}}{\tan \frac{\pi}{18}}$$

$$4. \cos(x - \pi) + \cos(x + \pi) = -2 \cos x$$

$$5. \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} 6x = 4 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x$$

$$6. \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} 4x = -4 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{5x}{2} \cos x$$

$$7. \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 4 \cos \frac{5x}{2} \cos x \cos \frac{x}{2}$$

$$8. \tan x = \frac{\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 3x}{\cos 5x + \cos 3x}$$

$$9. \frac{1 - 2 \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x} = \frac{1}{2} \csc x$$

$$10. \frac{\cos(x+y) - \cos(x-y)}{\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y)} = -\tan x$$

$$11. \frac{1}{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x} = \frac{1}{4} \csc \frac{3x}{2} \sec x \sec \frac{x}{2}$$

$$12. \frac{1}{4} [\cos(a+b+c) + \cos(a+b-c) + \cos(a-b+c) + \cos(a-b-c)] = \cos a \cos b \cos c$$



Este ejercicio no tiene soluciones al final del libro por ser demostraciones

Ecuaciones trigonométricas

Una ecuación trigonométrica es una expresión que tiene como incógnita valores angulares bajo los signos de funciones trigonométricas.

Al resolver una ecuación trigonométrica se debe encontrar el o los valores que satisfacen dicha ecuación, esto es, que en una ecuación trigonométrica no siempre existe una solución única, en ocasiones existen varias, las cuales se expresan como conjunto solución.

EJEMPLOS

Ejemplos

- 1 ••• Resuelve la siguiente ecuación para
- $0 \leq x \leq 2\pi$
- .

$$\operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 1$$

Solución

Se despeja la incógnita x y la función seno se representa como *arc sen* en el segundo miembro, luego el intervalo indica que se tomarán como solución aquellas entre 0° y 360°

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 1 & \quad \rightarrow \quad \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{arc sen} (1) \\ x + \frac{\pi}{4} &= \frac{\pi}{2} \\ x &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ \end{aligned}$$

El resultado puede expresarse en grados o en radianes.

- 2 ••• Resuelve la siguiente ecuación para
- θ
- si
- $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$
- .

$$3 \tan \theta - 4 = \tan \theta - 2$$

Solución

Se agrupan los términos que tienen a las incógnitas y se reducen:

$$\begin{aligned} 3 \tan \theta - 4 &= \tan \theta - 2 & \rightarrow & \quad 3 \tan \theta - \tan \theta = -2 + 4 \\ & & & \quad 2 \tan \theta = 2 \\ & & & \quad \tan \theta = 1 \end{aligned}$$

De esta expresión se despeja el ángulo θ

$$\begin{aligned} \tan \theta &= 1 & \rightarrow & \quad \theta = \operatorname{arc tan} (1) \\ & & & \quad \theta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ \end{aligned}$$

Luego, la tangente es positiva en el primero y tercer cuadrantes, por consiguiente, el conjunto solución es $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{5\pi}{4}$.

- 3 ••• Resuelve la siguiente ecuación para
- x
- si
- $0 \leq x \leq 2\pi$
- .

$$2 \operatorname{sen}^2 x - 1 = -\operatorname{sen} x$$

Solución

Se agrupan los términos en el primer miembro:

$$2 \operatorname{sen}^2 x - 1 = -\operatorname{sen} x \quad \rightarrow \quad 2 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0$$

La expresión resultante se factoriza,

$$(2 \operatorname{sen} x - 1)(\operatorname{sen} x + 1) = 0$$

Por tanto, $2 \operatorname{sen} x - 1 = 0$ y $\operatorname{sen} x + 1 = 0$, de las cuales se despeja la incógnita x , entonces,

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sen} x - 1 &= 0 & \operatorname{sen} x + 1 &= 0 \\ \operatorname{sen} x &= \frac{1}{2} & \operatorname{sen} x &= -1 \\ x &= \operatorname{arc sen} \left(\frac{1}{2} \right) & x &= \operatorname{arc sen} (-1) \\ x &= \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} & x &= \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

Luego, el conjunto solución es $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ y $\frac{3\pi}{2}$.

- 4 ••• Resuelve la siguiente ecuación para θ , si $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.

$$4 \cos^2 \theta - 3 = 0$$

Solución

Se despeja $\cos \theta$ de la ecuación:

$$4 \cos^2 \theta - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad 4 \cos^2 \theta = 3 \quad \rightarrow \quad \cos^2 \theta = \frac{3}{4}$$

$$\cos \theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Se obtienen dos ecuaciones

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{y} \quad \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Se despeja el ángulo θ

$$\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30^\circ, 330^\circ \quad ; \quad \theta = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 150^\circ, 210^\circ$$

Al final, el conjunto solución es $30^\circ, 150^\circ, 210^\circ$ y 330° .

- 5 ••• Resuelve la siguiente ecuación para θ si $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.

$$2 \sen^2 \theta = -\sen \theta$$

Solución

Se resuelve la ecuación:

$$2 \sen^2 \theta + \sen \theta = 0 \quad \rightarrow \quad \sen \theta (2 \sen \theta + 1) = 0$$

Se obtienen dos ecuaciones:

$$\sen \theta = 0 \quad 2 \sen \theta + 1 = 0$$

Se despeja el ángulo θ ,

$$\begin{aligned} \sen \theta &= 0 & 2 \sen \theta + 1 &= 0 \\ \theta &= \arcsen(0) & \theta &= \arcsen\left(-\frac{1}{2}\right) \\ \theta &= 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ & \theta &= 210^\circ, 330^\circ \end{aligned}$$

Por tanto, el conjunto solución es $0^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 330^\circ$ y 360° .

- 6 ••• Resuelve la siguiente ecuación para x si $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

$$2 \cos^2 x = \sen x - 1$$

Solución

$$2 \cos^2 x = \sen x - 1 \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} 2(1 - \sen^2 x) &= \sen x - 1 \\ 2 - 2\sen^2 x &= \sen x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 - 2\sen^2 x - \sen x + 1 &= 0 \\ -2\sen^2 x - \sen x + 3 &= 0 \quad (\div -1) \\ 2\sen^2 x + \sen x - 3 &= 0 \\ (2\sen x + 3)(\sen x - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Se despeja el ángulo x de ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned} \sen x - 1 &= 0 & 2 \sen x + 3 &= 0 \\ x &= \arcsen(1) & \sen x &= -\frac{3}{2} \text{ (no existe solución)} \\ x &= 90^\circ & & \end{aligned}$$

Cabe mencionar que $2 \sen x + 3 = 0$ no tiene solución porque $-1 \leq \sen x \leq 1$, entonces el conjunto solución es 90° .

EJERCICIO 50

Resuelve las siguientes ecuaciones, tales que $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

1. $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$
2. $\cos x + 2 \operatorname{sen} x = 2$
3. $2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = 1$
4. $\csc x = \sec x$
5. $2 \cos x \cdot \tan x - 1 = 0$
6. $4 \cos^2 x = 3 - 4 \cos x$
7. $3 \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 3$
8. $2 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 0$
9. $\cos x + 9 \operatorname{sen}^2 x = 1$
10. $\csc^2 x = 2 \cot^2 x$
11. $\operatorname{sen} x \cdot \tan x + 1 = \operatorname{sen} x + \tan x$
12. $2 \cos^2 x + 3 \operatorname{sen} x = 0$
13. $\operatorname{sen} x - \cos x = 0$
14. $3 \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 0$
15. $\cos x - \sqrt{3} \operatorname{sen} x = 0$
16. $2 \operatorname{sen} x + \csc x = 3$
17. $\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{ctg} x - \operatorname{sen} x = 0$
18. $2 \cos^3 x + \cos^2 x - 2 \cos x - 1 = 0$
19. $4 \cos x - 2 = 2 \tan x \cdot \operatorname{ctg} x - \sec x$
20. $\tan^5 x - 9 \tan x = 0$
21. $\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x} + \sqrt{3} \tan x = 0$
22. $\operatorname{sen} x \cdot \sec x + \sqrt{2} \operatorname{sen} x - \sqrt{2} = \sec x$
23. $(2 - \sqrt{3}) \operatorname{sen} x + (2 - \sqrt{3}) = 2 \cos^2 x$
24. $(2 + \sqrt{5}) - (1 + 2\sqrt{5}) \cos x = 2 \operatorname{sen}^2 x$
25. $\sec x(2 \operatorname{sen} x + 1) - 2(2 \operatorname{sen} x + 1) = 0$
26. $\frac{\sqrt{3} \tan x}{\sec x} - \cos x = 0$
27. $\sqrt{2} \cos x - \sqrt{2} \operatorname{sen} x = -\sqrt{3}$
28. $5 \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 2$
29. $\frac{5}{\csc x} - 5\sqrt{3} \cos x = 0$
30. $\cos^2 x + \cos x = \operatorname{sen}^2 x$

 Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 15

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

RECTÁNGULO

El triángulo



Medición de tierras
en el antiguo
Egipto mediante
los azudadores

Su origen se encuentra en la cultura egipcia, específicamente en la geometría egipcia.

Los egipcios dominaban a la perfección los triángulos, ya que fueron la base para la construcción de sus pirámides así como la medición de tierras. Se auxiliaban de los anudadores, hacían nudos igualmente espaciados para medir y se dieron cuenta que al ubicar cuerdas de diversas longitu-

des en forma de triángulo obtenían ángulos rectos y, por tanto, triángulos rectángulos, lo cual significa que tenían conocimiento de la relación que existe entre la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo.

Sin embargo, Pitágoras fue el primero en demostrar el teorema que lleva su nombre, el cual establece la relación entre los lados de un triángulo rectángulo, aunque los egipcios y babilónicos lo utilizaban en sus cálculos y construcciones pero sin haberlo demostrado.

Solución de triángulos rectángulos

Dados tres datos de un triángulo, si uno de ellos es un lado, encontrar el valor de los datos restantes.

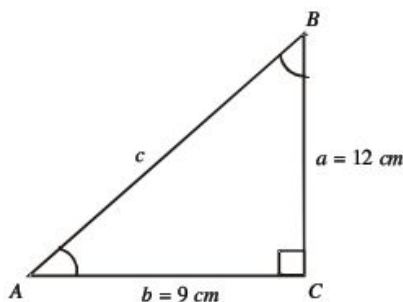
Para los triángulos rectángulos basta conocer el valor de uno de los lados y algún otro dato, el cual puede ser un ángulo u otro lado, debido a que el tercer dato siempre está dado ya que, al ser triángulo rectángulo, uno de los ángulos siempre será de 90° .

Cabe destacar que el teorema de Pitágoras y las funciones trigonométricas son de suma importancia para la resolución de triángulos rectángulos.

EJEMPLOS

- 1 •• En el triángulo ABC , $a = 12 \text{ cm}$, $b = 9 \text{ cm}$. Resuelve el triángulo.

Solución



Se proporcionan catetos; entonces, para encontrar la hipotenusa se utiliza el teorema de Pitágoras:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = \sqrt{(12)^2 + (9)^2} = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15$$

Por lo tanto $c = 15 \text{ cm}$.

Para encontrar los ángulos se utilizan funciones trigonométricas; en este caso, al tener los tres lados se puede aplicar cualquier función. Por ejemplo, en el caso del ángulo A se aplica la función tangente, entonces:

$$\tan A = \frac{12}{9}$$

Se despeja el ángulo A :

$$\angle A = \arctan\left(\frac{12}{9}\right) = 53^\circ 7' 48''$$

Para encontrar el tercer ángulo, se tiene que $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$, en particular $\angle A + \angle B = 90^\circ$ ya que $\angle C = 90^\circ$, por tanto:

$$53^\circ 7' 48'' + \angle B = 90^\circ$$

$$\angle B = 90^\circ - 53^\circ 7' 48''$$

$$\angle B = 36^\circ 52' 12''$$

- 2 ••• En el triángulo MNP , $m = 13,4$ cm, $\angle P = 40^\circ$. Resuelve el triángulo.

Solución

Para hallar el $\angle N$, se aplica:

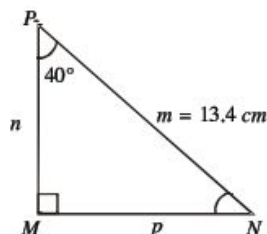
$$\angle N + \angle P + \angle M = 180^\circ$$

Ya que $\angle M = 90^\circ$, entonces,

$$\angle N + \angle P = 90^\circ \text{ donde } \angle N = 90^\circ - \angle P$$

$$\angle N = 90^\circ - 40^\circ$$

$$\angle N = 50^\circ$$



Lado n

Se elige uno de los ángulos agudos, en este caso $\angle P$ y se establece la función trigonométrica de acuerdo al lado que se va a encontrar (n) y el lado conocido ($m = 13,4$), por lo que la función que se busca es el coseno de P , entonces:

$$\cos P = \frac{n}{m} \quad \text{donde} \quad \cos 40^\circ = \frac{n}{13,4}$$

Al despejar n :

$$n = (13,4) (\cos 40^\circ) = (13,4) (0,76604) = 10,265 \text{ cm}$$

Para hallar el lado restante (p) se utiliza el teorema de Pitágoras:

$$p = \sqrt{m^2 - n^2} = \sqrt{(13,4)^2 - (10,26)^2} = \sqrt{179,56 - 105,27} = \sqrt{74,29} = 8,62 \text{ cm}$$

- 3 ••• En el triángulo ABC , $a = 54$ cm, $A = 36^\circ 20'$. Resuelve el triángulo.

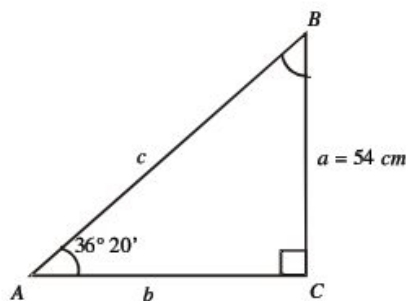
Solución

En el triángulo ABC :

$$\angle B = 90^\circ - \angle A$$

$$\angle B = 90^\circ - 36^\circ 20'$$

$$\angle B = 53^\circ 40'$$



Para hallar el lado b , se utiliza la función tangente de $\angle A$:

$$\tan A = \frac{a}{b} \quad \text{donde} \quad \tan 36^\circ 20' = \frac{54}{b}$$

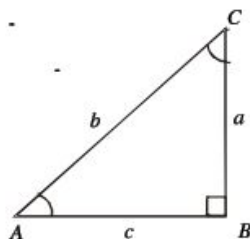
$$\text{Al despejar } b: b = \frac{54}{\tan 36^\circ 20'} = \frac{54}{0,7354} = 73,42 \text{ cm}$$

El valor de la hipotenusa se encuentra mediante el teorema de Pitágoras:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(54)^2 + (73,42)^2} = 91,14 \text{ cm}$$

EJERCICIO 51

Resuelve el siguiente triángulo rectángulo según los datos proporcionados:



1. $a = 12, b = 17$
2. $\angle A = 32^\circ, b = 4$
3. $\angle C = 46^\circ 20', a = 5$
4. $a = 32,5, c = 41,3$
5. $\angle A = 45^\circ, a = 13$
6. $\angle C = 54^\circ, b = 22,6$
7. $b = 22,5, c = 18,7$
8. $\angle A = 48^\circ 12', b = 34,5$
9. $\angle C = 34^\circ 32', c = 56,9$
10. $a = 18,23, b = 19,86$
11. $\angle A = 32^\circ 27', a = 12$
12. $b = \sqrt{17}, a = 2$
13. $\angle C = 48^\circ 23', b = 23$
14. $a = 7,5, c = 2,5$
15. $c = 13, \angle A = 25^\circ 49'$
16. Calcula el valor de los ángulos agudos si $a = \frac{c}{2}$.
17. Determina el valor de los ángulos agudos y el valor de los lados si $a = x, b = x + 8$ y $c = x + 7$.
18. Calcula el valor de los ángulos agudos y el valor de los lados si $a = x + 1, b = x + 2$ y $c = x$.
19. Determina el valor de los ángulos agudos si $a = c$.
20. Calcula el valor de los ángulos agudos si $b = 3a$.



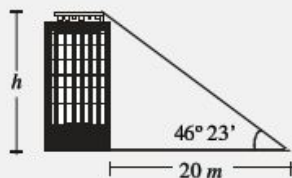
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente ■

• PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

- 1 Se sitúa un punto a 20 metros de un edificio. Si el ángulo de elevación al punto más alto del edificio es de $46^\circ 23'$, encuentra la altura del edificio.

Solución

Se representa el problema con un dibujo:



Para hallar la altura del edificio se utiliza la función tangente, ya que se tienen como datos un ángulo y el cateto adyacente a éste, y la altura representa el cateto opuesto al ángulo dado:

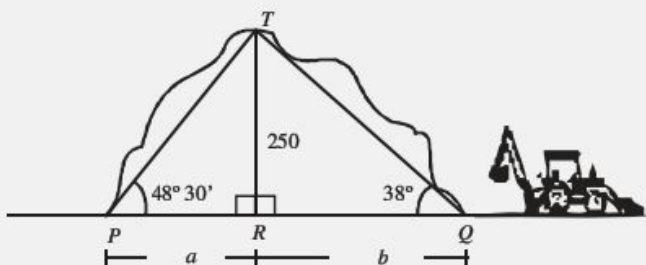
$$\tan 46^\circ 23' = \frac{h}{20}$$

Al despejar h :

$$h = (20) (\tan 46^\circ 23') = (20) (1.04949) = 21\text{ m}$$

De acuerdo con el dato anterior, la altura del edificio es de 21 m .

- 2 En la construcción de una carretera se encuentra una montaña de 250 metros de altura, a través de ella se construirá un túnel. La punta de la montaña se observa bajo un ángulo de $48^\circ 30'$ desde un punto P en un extremo de la montaña, y bajo un ángulo de 38° desde el otro extremo. ¿Cuál será la longitud del túnel?

Solución

La longitud del túnel está determinada por $a + b$.

Para obtener a , se utiliza el triángulo PRT y se aplica la función tangente de $\angle P$:

$$\tan 48^\circ 30' = \frac{250}{a}$$

Al despejar a

$$a = \frac{250}{\tan 48^\circ 30'} = \frac{250}{1.1302} = 221.19\text{ m}$$

Para obtener b , se utiliza el triángulo QRT y se aplica la función tangente de $\angle Q$:

$$\tan 38^\circ = \frac{250}{b}$$

Al despejar b

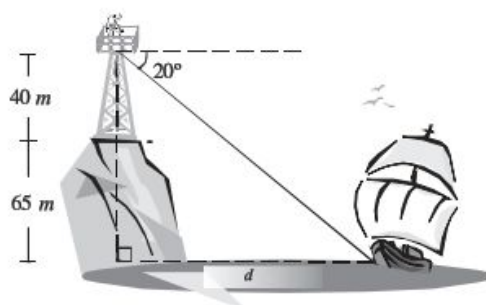
$$b = \frac{250}{\tan 38^\circ} = \frac{250}{0.7812} = 320.02\text{ m}$$

Por tanto, la longitud del túnel es: $221.19 + 320.02 = 541.21\text{ m}$.

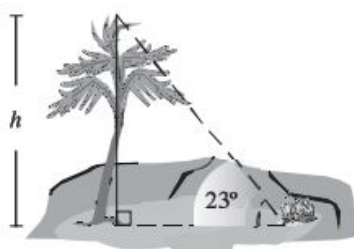
EJERCICIO 52

Resuelve los siguientes problemas:

1. En una torre de 40 m que está sobre un peñasco de 65 m de alto junto a una laguna, se encuentra un observador que mide el ángulo de depresión de 20° de un barco situado en la laguna. ¿A qué distancia de la orilla del peñasco se encuentra el barco?



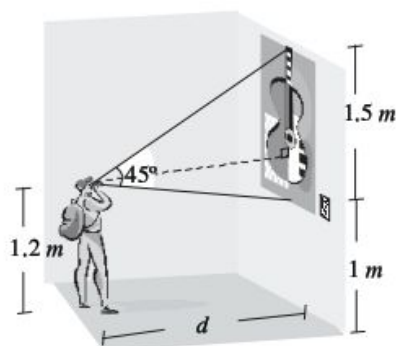
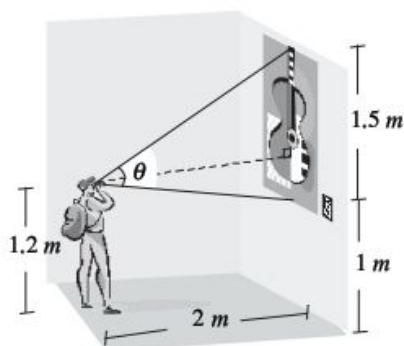
2. A una distancia de 10 m de la base de un árbol, la punta de éste se observa bajo un ángulo de 23° . Calcula la altura del árbol.



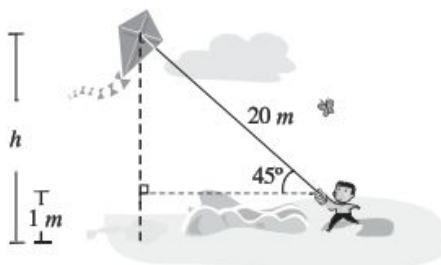
3. Una persona cuyos ojos están a $1,20$ metros del suelo, observa una pintura que se encuentra a un metro del suelo y mide $1,50$ metros. Dicha persona se encuentra a dos metros de distancia de la pintura.

a) ¿Cuál es el ángulo de visión?

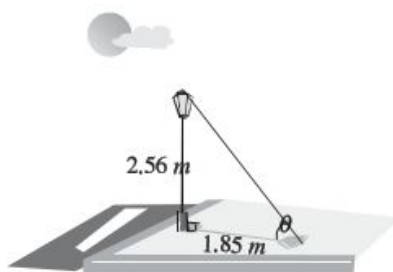
b) ¿A qué distancia se debe parar la persona para que el ángulo de visión sea de 45° ?



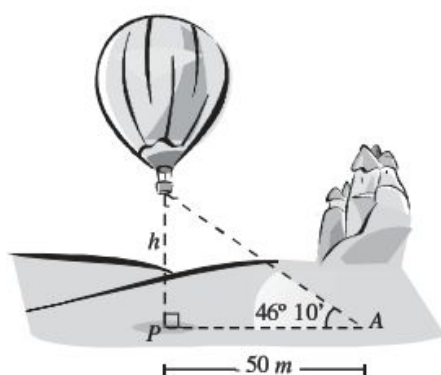
4. Un niño tiene un papalote, el cual hace volar sosteniendo una cuerda a un metro del suelo. La cuerda se tensa formando un ángulo de 45° con respecto a la horizontal. Obtén la altura del papalote con respecto al suelo si el niño suelta 20 metros de cuerda.



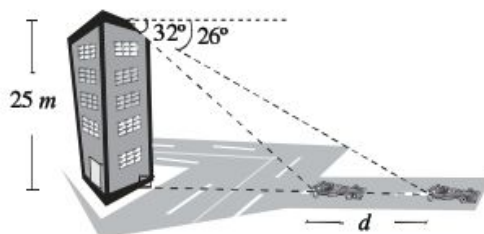
5. Determina el ángulo de elevación del Sol si un poste de 2.56 metros proyecta una sombra de 1.85 metros.



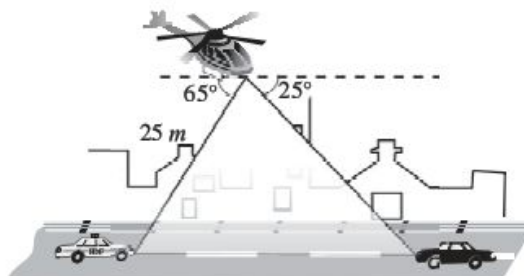
6. Un globo de aire caliente sube con un ángulo de elevación con respecto a un punto A de $46^\circ 10'$. Calcula la altura a la que se encuentra el globo, con respecto a un punto P del suelo, si la distancia de éste al punto A es de 50 metros.



7. Desde lo alto de una torre cuya altura es de 25 m , se observa un automóvil alejándose de la torre, con un ángulo de depresión de 32° ; si un instante después el ángulo es de 26° , ¿qué distancia se ha desplazado el automóvil?



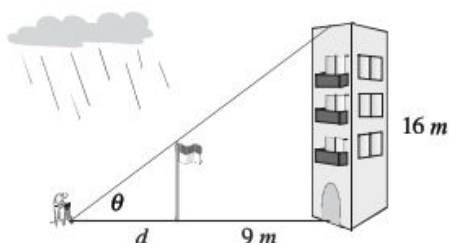
8. Un maleante es perseguido por un patrullero, quien es apoyado desde el aire por un helicóptero, como se muestra en la figura. Si el ángulo de depresión desde el helicóptero hasta donde se encuentra el delincuente es de 25° y el ángulo de depresión hasta donde se encuentra el patrullero es de 65° , y su distancia a éste es de 25 metros,



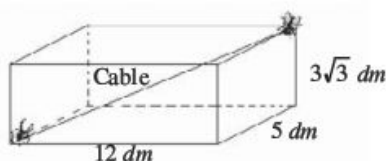
calcula:

- La distancia entre el helicóptero y el delincuente.
- La distancia entre el patrullero y el delincuente.
- La altura del helicóptero.

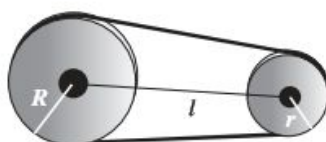
9. Un ingeniero civil desea conocer el ángulo de elevación del topógrafo, así como la distancia a la que se encuentra del asta bandera, si se sabe que el asta bandera mide la cuarta parte de la altura del edificio que es de 16 metros, y la distancia entre ambas es de 9 metros.



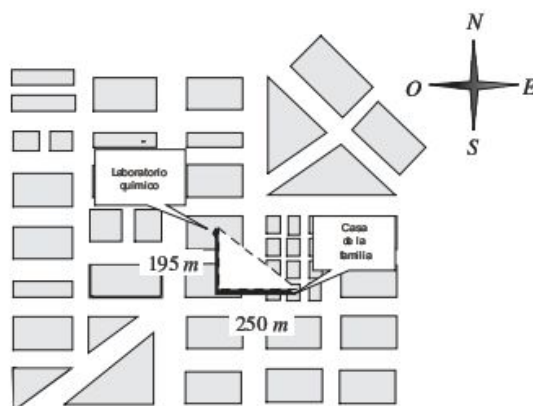
10. Una araña que se encuentra en la base de una caja desea alcanzar una mosca ubicada en la esquina opuesta de la caja, como se muestra en la figura. Las esquinas están conectadas por un cable tenso, determina cuál es el ángulo de elevación del cable y la distancia que recorrería la araña hasta llegar a la mosca por el cable.



11. Se tienen dos poleas de radios R , r y la distancia entre sus ejes es l , ¿cuál es la longitud de la cadena de transmisión?



12. Debido a un accidente en unos laboratorios químicos, se tuvieron que desalojar las casas que estuvieran en un radio de 500 m de los laboratorios. Una familia vivía a 250 m al este y 195 m al sur de los laboratorios. Determina si la familia desalojó su casa.



➔ Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 16

TRIÁNGULOS OBICUÁNGULOS

Johann
MÜLLER



Johann Müller Von
Königsberg
(regiomontanus)
1436 - 1476

Astrónomo y matemático alemán que realizó tratados sobre la trigonometría y la astronomía, inventor de diversas herramientas para la observación y la medida del tiempo.

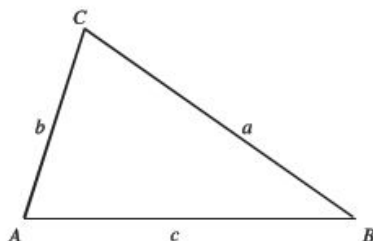
Su obra se compone de cinco libros llamados: *De triangulis omnimodis*, publicada en Nuremberg 70 años después de haber sido escrita! Es interesante desde el punto de vista matemático, ya que en el primer libro se establecen las definiciones básicas de radio, arcos, igualdad, círculos, cuerdas y la función seno. En el segundo, la ley de senos para la resolución de problemas con triángulos, y del tercero al quinto libros se expone la trigonometría esférica.

Solución de triángulos oblicuángulos

Un triángulo es oblicuángulo cuando sus tres ángulos son oblicuos, es decir, no tiene un ángulo recto. Este tipo de triángulos se resuelven mediante la ley de senos, de cosenos o de tangentes.

Ley de senos

La razón que existe entre un lado de un triángulo oblicuángulo y el seno del ángulo opuesto a dicho lado es proporcional a la misma razón entre los lados y ángulos restantes.



Ley de senos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

La ley de senos se utiliza cuando:

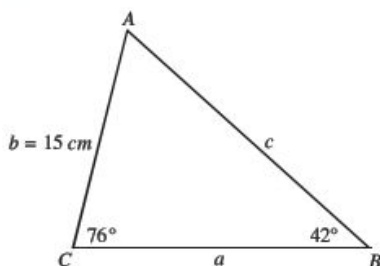
- Los datos conocidos son 2 lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
- Los datos conocidos son 2 ángulos y cualquier lado.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 En el triángulo ABC, $b = 15 \text{ cm}$, $\angle B = 42^\circ$ y $\angle C = 76^\circ$. Calcula la medida de los lados y ángulos restantes.

Solución



Para obtener $\angle A$, se aplica $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$, despejando,

$$\angle A = 180^\circ - \angle C - \angle B = 180^\circ - 42^\circ - 76^\circ = 62^\circ$$

Se conoce el valor del lado b y el ángulo B , opuesto a dicho lado, también se proporciona el ángulo C , por tanto, se puede determinar la medida del lado c ,

$$\frac{c}{\operatorname{sen} C} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

Al sustituir $\angle C = 76^\circ$, $\angle B = 42^\circ$ y $b = 15 \text{ cm}$, se determina que,

$$\frac{c}{\operatorname{sen} 76^\circ} = \frac{15}{\operatorname{sen} 42^\circ}$$

De la expresión anterior se despeja c ,

$$c = \frac{(15)(\operatorname{sen} 76^\circ)}{\operatorname{sen} 42^\circ} = \frac{(15)(0.9703)}{0.6691} = 21.75 \text{ cm}$$

Por último, se determina el valor del lado a con la siguiente relación:

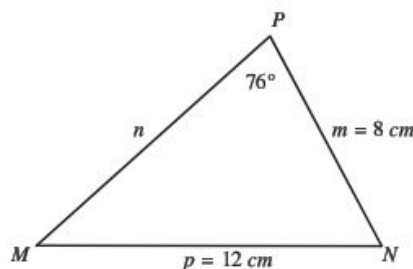
$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \quad \text{donde} \quad \frac{a}{\operatorname{sen} 62^\circ} = \frac{15}{\operatorname{sen} 42^\circ}$$

Al despejar a :

$$a = \frac{(15)(\operatorname{sen} 62^\circ)}{\operatorname{sen} 42^\circ} = \frac{(15)(0.8829)}{0.6691} = 19.8 \text{ cm}$$

- 2 ••• En el triángulo MNP , $\angle P = 76^\circ$, $p = 12 \text{ cm}$ y $m = 8 \text{ cm}$. Resuelve el triángulo.

Solución



Con los datos del problema, se calcula el valor de $\angle M$ con la siguiente relación:

$$\frac{m}{\operatorname{sen} M} = \frac{p}{\operatorname{sen} P}$$

Al despejar $\operatorname{sen} M$ y sustituir los valores, se obtiene:

$$\operatorname{sen} M = \frac{m \operatorname{sen} P}{p} = \frac{(8)(\operatorname{sen} 76^\circ)}{12} = \frac{(8)(0.97029)}{12} = 0.6469$$

Entonces:

$$\angle M = \operatorname{arc} \operatorname{sen} (0.6469)$$

$$\angle M = 40^\circ 18'$$

Por otro lado,

$$\angle N = 180^\circ - \angle P - \angle M = 180^\circ - 76^\circ - 40^\circ 18' = 63^\circ 42'$$

Se aplica la ley de senos para encontrar el valor del lado n :

$$\frac{n}{\operatorname{sen} N} = \frac{p}{\operatorname{sen} P}$$

Al despejar n ,

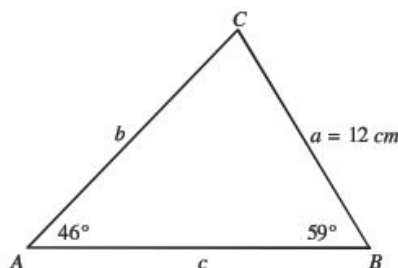
$$n = \frac{p \operatorname{sen} N}{\operatorname{sen} P} = \frac{(12)(\operatorname{sen} 63^\circ 42')}{\operatorname{sen} 76^\circ} = \frac{(12)(0.8965)}{0.9703} = 11.09 \text{ cm}$$

Por consiguiente,

$$\angle M = 40^\circ 18', \angle N = 63^\circ 42' \text{ y } n = 11.09 \text{ cm}$$

- 3 ••• En el triángulo ABC , $\angle A = 46^\circ$, $\angle B = 59^\circ$ y $a = 12 \text{ cm}$. Determina los elementos restantes del triángulo.

Solución



En el triángulo:

$$\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - 46^\circ - 59^\circ = 75^\circ$$

Para hallar el valor del lado c se utiliza la relación:

$$\frac{c}{\operatorname{sen} C} = \frac{a}{\operatorname{sen} A} \quad \text{donde} \quad c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} = \frac{(12)(\operatorname{sen} 75^\circ)}{\operatorname{sen} 46^\circ} = \frac{(12)(0.9659)}{0.7193} = 16.11 \text{ cm}$$

Asimismo, para obtener el valor del lado b se utiliza la relación:

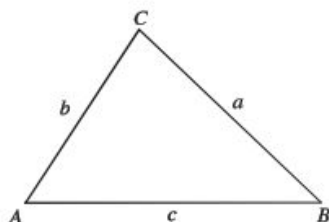
$$\frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{a}{\operatorname{sen} A} \quad \text{donde} \quad b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} = \frac{(12)(\operatorname{sen} 59^\circ)}{\operatorname{sen} 46^\circ} = \frac{(12)(0.8571)}{0.7193} = 14.3 \text{ cm}$$

Finalmente, los elementos restantes son:

$$\angle C = 75^\circ, c = 16.11 \text{ cm y } b = 14.3 \text{ cm}$$

Ley de cosenos

El cuadrado de un lado de un triángulo oblicuángulo es igual a la suma de los cuadrados de los lados restantes, menos el doble producto de dichos lados por el coseno del ángulo opuesto al lado buscado.



Ley de cosenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Al despejar

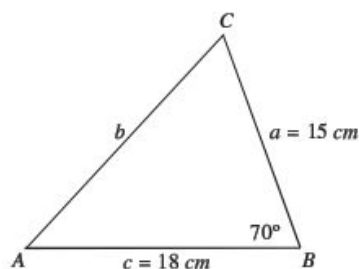
La ley de cosenos se utiliza cuando:

- Se tiene el valor de 2 lados y el ángulo comprendido entre ellos.
- Se tiene el valor de los 3 lados.

EJEMPLOS

1 •• En el triángulo ABC , $a = 15 \text{ cm}$, $c = 18 \text{ cm}$, $\angle B = 70^\circ$. Resuelve el triángulo.

Solución



Para calcular el valor del lado b se utiliza la fórmula:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

Donde,

$$b = \sqrt{(15)^2 + (18)^2 - 2(15)(18) \cos 70^\circ} = \sqrt{225 + 324 - 2(15)(18)(0.34202)} = \sqrt{364.3}$$

$$b = 19.09 \text{ cm}$$

Conocidos los 3 lados del triángulo se calcula el valor de $\angle A$:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(19.09)^2 + (18)^2 - (15)^2}{2(19.09)(18)} = \frac{364.43 + 324 - 225}{687.24} = 0.6743$$

Donde: $\angle A = \arccos 0.6743 = 47^\circ 36'$

Por último, se determina la medida de $\angle C$:

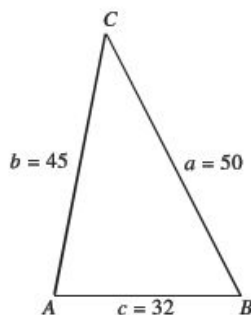
$$\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - 47^\circ 36' - 70^\circ = 62^\circ 24'$$

Por tanto, los elementos restantes del triángulo ABC son:

$$b = 19.09 \text{ cm}, \angle A = 47^\circ 36' \text{ y } \angle C = 62^\circ 24'$$

- 2 ••• En el triángulo ABC , $a = 50$, $b = 45$, $c = 32$. Resuelve el triángulo.

Solución



Para obtener $\angle A$:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(45)^2 + (32)^2 - (50)^2}{2(45)(32)} = \frac{2\,025 + 1\,024 - 2\,500}{2\,880} = 0,1906$$

Donde,

$$\angle A = \arccos 0,1906 = 79^\circ$$

Para obtener $\angle B$:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(50)^2 + (32)^2 - (45)^2}{2(50)(32)} = \frac{2\,500 + 1\,024 - 2\,025}{3\,200} = 0,4684$$

Donde,

$$\angle B = \arccos 0,4684 = 62^\circ 4'$$

Para calcular $\angle C$:

$$\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - 79^\circ - 62^\circ 4' = 38^\circ 56'$$

Por consiguiente, los ángulos del triángulo ABC son:

$$\angle A = 79^\circ, \angle B = 62^\circ 4' \text{ y } \angle C = 38^\circ 56'$$

Ley de tangentes

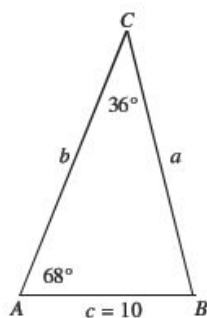
En todo triángulo oblicuángulo la razón entre la diferencia de 2 lados y la suma de los mismos, es igual a la razón entre la tangente de la semidiferencia de los ángulos opuestos a cada uno de los lados, y la tangente de la semisuma de dichos ángulos.

Fórmulas:

$$\frac{a-c}{a+c} = \frac{\tan\left(\frac{A-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+C}{2}\right)}, \quad \frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{B+C}{2}\right)} \text{ y } \frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

EJEMPLOS

1 En el triángulo ABC , $c = 10$, $A = 68^\circ$, $C = 36^\circ$. Resuelve el triángulo.

Solución

Se determina el $\angle B$:

$$\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C = 180^\circ - 68^\circ - 36^\circ = 76^\circ$$

Se aplica la ley de tangentes para encontrar el valor del lado a :

$$\frac{a-c}{a+c} = \frac{\tan\left(\frac{A-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+C}{2}\right)}$$

Al sustituir los valores de $c = 10$, $\angle A = 68^\circ$ y $\angle C = 36^\circ$, se obtiene:

$$\frac{a-10}{a+10} = \frac{\tan\left(\frac{68^\circ-36^\circ}{2}\right)}{\tan\left(\frac{68^\circ+36^\circ}{2}\right)} = \frac{\tan 16^\circ}{\tan 52^\circ} = \frac{0,2867}{1,2799} = 0,2240$$

Entonces, de la expresión resultante:

$$\frac{a-10}{a+10} = 0,2240$$

Se despeja a :

$$\begin{aligned} a - 10 &= 0,2240a + 2,240 & \rightarrow & & a - 0,2240a &= 2,240 + 10 \\ & & & & 0,776a &= 12,240 \\ & & & & a &= \frac{12,240}{0,776} \\ & & & & a &= 15,77 \text{ cm} \end{aligned}$$

Se aplica la ley de tangentes para encontrar el valor del lado b :

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{B+C}{2}\right)}$$

Al sustituir los valores de $c = 10$, $\angle B = 76^\circ$ y $\angle C = 36^\circ$, se determina que:

$$\frac{b-10}{b+10} = \frac{\tan\left(\frac{76^\circ-36^\circ}{2}\right)}{\tan\left(\frac{76^\circ+36^\circ}{2}\right)} = \frac{\tan 20^\circ}{\tan 56^\circ} = \frac{0,3639}{1,4826} = 0,2454$$

De la expresión resultante,

$$\frac{b-10}{b+10} = 0,2454$$

Se despeja b :

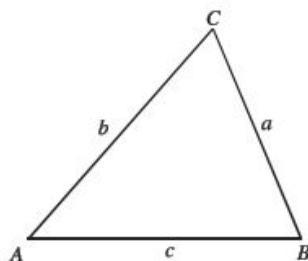
$$\begin{aligned} b - 10 &= 0,2454b + 2,454 & \rightarrow & & b - 0,2454b &= 10 + 2,454 \\ & & & & 0,7546b &= 12,454 \\ & & & & b &= 16,5 \text{ cm} \end{aligned}$$

Por tanto, los elementos restantes del triángulo son:

$$\angle B = 76^\circ, a = 15,77 \text{ cm y } b = 16,5 \text{ cm}$$

EJERCICIO 53

Resuelve el siguiente triángulo oblicuángulo de acuerdo con los datos proporcionados.



1. $\angle B = 57^\circ 20'$, $\angle C = 43^\circ 39'$, $b = 18$
2. $\angle A = 63^\circ 24'$, $\angle C = 37^\circ 20'$, $c = 32,4$
3. $\angle A = 85^\circ 45'$, $\angle B = 26^\circ 31'$, $c = 43,6$
4. $\angle C = 49^\circ$, $\angle A = 54^\circ 21'$, $a = 72$
5. $\angle B = 29^\circ$, $\angle C = 84^\circ$, $b = 12,3$
6. $\angle A = 32^\circ$, $\angle B = 49^\circ$, $a = 12$
7. $a = 5$, $\angle A = 32^\circ$, $b = 8$
8. $c = 13$, $b = 10$, $\angle C = 35^\circ 15'$
9. $\angle B = 56^\circ 35'$, $b = 12,7$, $a = 9,8$
10. $a = 9$, $c = 11,5$, $\angle C = 67^\circ 21'$
11. $a = 15$, $b = 16$, $c = 26$
12. $a = 32,4$, $b = 48,9$, $c = 66,7$
13. $a = 100$, $b = 88,7$, $c = 125,5$
14. $a = 15$, $b = 12$, $c = 20$
15. $a = 12$, $b = 15$, $\angle C = 68^\circ$
16. $a = 28$, $c = 32$, $\angle B = 76^\circ$
17. $b = 45$, $c = 75$, $\angle A = 35^\circ$
18. $a = 12,6$, $b = 18,7$, $\angle C = 56^\circ$

Demuestra que para el triángulo se cumple:

$$\ominus \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

$$\ominus a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\ominus b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$\ominus c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



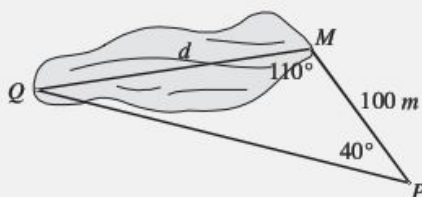
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente ■

• PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

- 1 ••• Para calcular la distancia entre 2 puntos a las orillas de un lago, se establece un punto P a 100 metros del punto M ; al medir los ángulos resulta que $\angle M = 110^\circ$ y $\angle P = 40^\circ$. ¿Cuál es la distancia entre los puntos M y Q ?

Solución

Se realiza una figura que represente el problema:



De acuerdo con los datos se determina el valor de $\angle Q$:

$$\angle Q = 180^\circ - 110^\circ - 40^\circ = 30^\circ$$

Sea $\overline{MQ} = d$, entonces, al aplicar la ley de senos se obtiene:

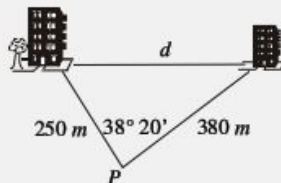
$$\frac{d}{\sen 40^\circ} = \frac{100}{\sen 30^\circ}$$

De la cual se despeja d :

$$d = \frac{(100)(\sen 40^\circ)}{\sen 30^\circ} = \frac{(100)(0,6427)}{0,5} = 128,54$$

En consecuencia, la distancia entre los puntos es de 128,54 metros.

- 2 ••• Un observador se encuentra en un punto P que dista de 2 edificios, 250 m y 380 m, respectivamente. Si el ángulo formado por los 2 edificios y el observador es $38^\circ 20'$, precisa la distancia entre ambos edificios.

Solución

Sea d la distancia entre ambos edificios; entonces, por la ley de cosenos:

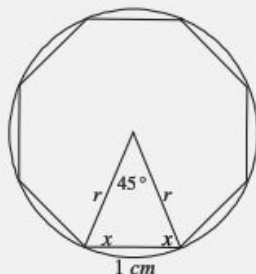
$$d = \sqrt{(250)^2 + (380)^2 - 2(250)(380)\cos 38^\circ 20'} = \sqrt{62\,500 + 144\,400 - 149\,038,98} = 240,55$$

Finalmente, la distancia entre los edificios es de 240,55 m.

- 3 •• Se inscribe un octágono regular de lado 1 cm en una circunferencia; determina el área del círculo.

Solución

Si se inscribe un polígono regular en una circunferencia, la distancia del centro al vértice es el radio, si se trazan 2 radios a 2 vértices se forma un triángulo isósceles y la medida del ángulo central es $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$, como lo muestra la figura:



Sea x la medida de cada ángulo de la base en un triángulo isósceles, entonces:

$$2x + 45^\circ = 180^\circ \quad \rightarrow \quad 2x = 135^\circ \quad \rightarrow \quad x = \frac{135^\circ}{2} = 67.5^\circ$$

Por la ley de senos se tiene la igualdad:

$$\frac{1}{\sen 45^\circ} = \frac{r}{\sen 67.5^\circ}$$

Al despejar r de la expresión anterior:

$$r = \frac{\sen 67.5^\circ}{\sen 45^\circ} = 1.3 \text{ cm}$$

Luego, el área del círculo está dada por la expresión:

$$A = \pi r^2$$

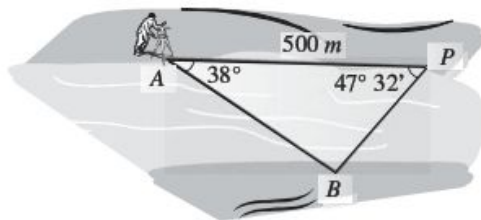
Se sustituye $r = 1.3 \text{ cm}$ y se obtiene:

$$A = \pi (1.3 \text{ cm})^2 = 1.69\pi \text{ cm}^2$$

EJERCICIO 54

Resuelve los siguientes problemas:

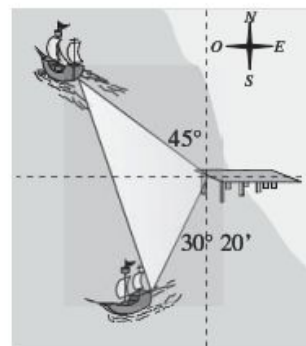
1. Para establecer la distancia desde un punto A en la orilla de un río a un punto B de éste, un agrimensor selecciona un punto P a 500 metros del punto A , las medidas de $\angle BAP$ y $\angle BPA$ son 38° y $47^\circ 32'$. Obtén la distancia entre A y B .



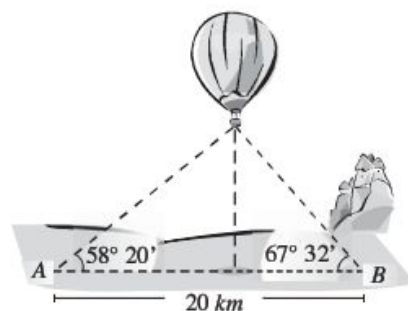
2. El horario y el minutero de un reloj miden respectivamente 0.7 y 1.2 cm. Determina la distancia entre los extremos de dichas manecillas a las 13:30 horas.



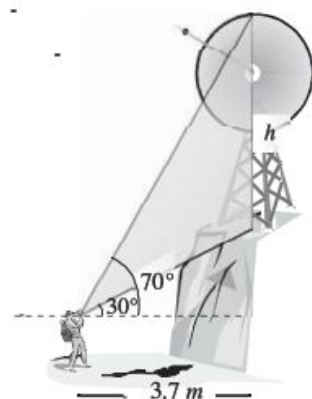
3. Un barco sale de un puerto a las 10:00 a.m. a 10 km/h con dirección sur $30^{\circ}20'O$. Una segunda embarcación sale del mismo puerto a las 11:30 h a 12 km/h con dirección norte $45^{\circ}O$. ¿Qué distancia separa a ambos barcos a las 12:30 horas?



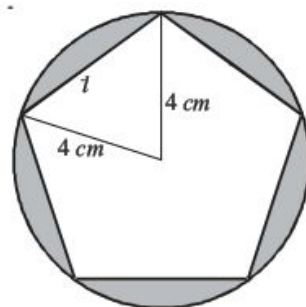
4. La distancia entre 2 puntos A y B es de 20 km. Los ángulos de elevación de un globo con respecto a dichos puntos son de $58^{\circ}20'$ y $67^{\circ}32'$. ¿A qué altura del suelo se encuentra?



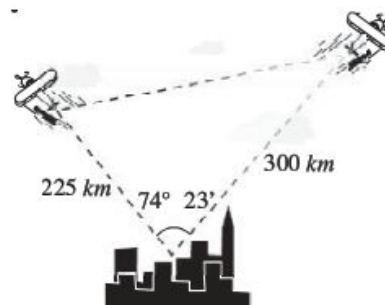
5. Una persona se encuentra a 3.7 m de un risco, sobre el cual se localiza una antena. La persona observa el pie de la antena con un ángulo de elevación de 30° y la parte superior de ésta con un ángulo de 70° . Determina la altura de la antena.



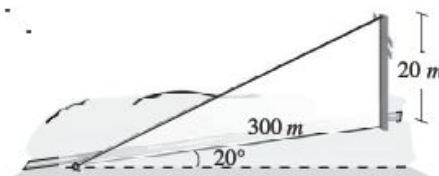
6. ¿Cuál es la longitud de los lados de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 4 centímetros de radio?



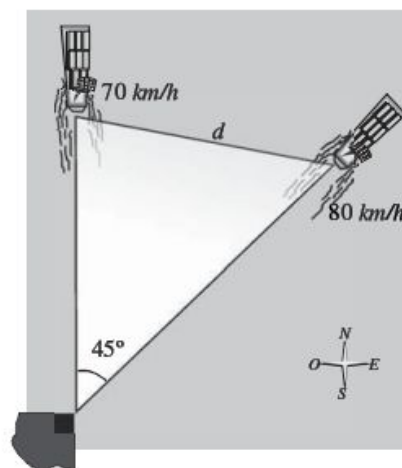
7. Dos aviones parten de una ciudad y sus direcciones forman un ángulo de $74^\circ 23'$. Después de una hora, uno de ellos se encuentra a 225 km de la ciudad, mientras que el otro está a 300 km. ¿Cuál es la distancia entre ambos aviones?



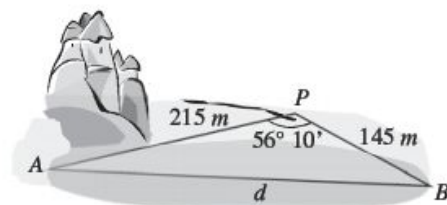
8. En un plano inclinado se encuentra un poste vertical de 20 metros de altura. Si el ángulo del plano con respecto a la horizontal es de 20° , calcula la longitud de un cable que llegaría de un punto a 300 metros cuesta abajo a la parte superior del poste.



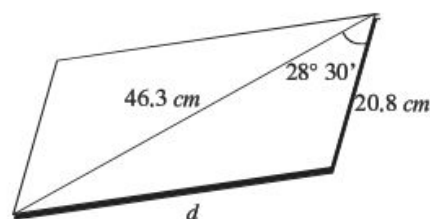
9. Un barco parte de un puerto y navega hacia el norte con una velocidad de 70 km por hora. Al mismo tiempo, pero en dirección noreste, otro buque viaja a razón de 80 km por hora. ¿A qué distancia se encontrarán uno del otro después de media hora?



10. La distancia que hay de un punto hacia los extremos de un lago son 145 y 215 metros, mientras que el ángulo entre las 2 visuales es de $56^\circ 10'$. Calcula la distancia entre los extremos del lago.

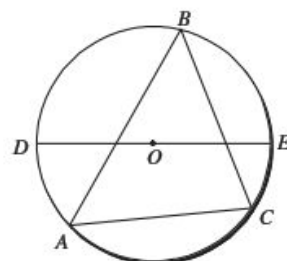


11. En un paralelogramo que tiene un lado que mide 20,8 cm, su diagonal mide 46,3 cm. Determina la longitud del otro lado si se sabe que el ángulo entre la diagonal y el primer lado es de $28^\circ 30'$.

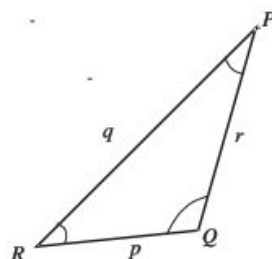


12. Si $\triangle ABC$ triángulo cualquiera y $\overline{DE}$ es el diámetro de la circunferencia, demuestra que:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{DE}}$$



13. Observa la siguiente figura:



- a) Demuestra que dado un lado y 2 ángulos adyacentes, el área del triángulo será:

$$A = \frac{r^2 \operatorname{sen} Q \operatorname{sen} P}{2 \operatorname{sen} (Q+P)} = \frac{q^2 \operatorname{sen} P \operatorname{sen} R}{2 \operatorname{sen} (P+R)} = \frac{p^2 \operatorname{sen} R \operatorname{sen} Q}{2 \operatorname{sen} (R+Q)}$$

- b) Demuestra que el área del triángulo está dada por cualquiera de las siguientes fórmulas:

$$\ominus A = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{sen} P \operatorname{sen} Q \csc R$$

$$\ominus A = \frac{2pqr}{p+q+r} \left[\cos \left(\frac{1}{2} P \right) \cos \left(\frac{1}{2} Q \right) \cos \left(\frac{1}{2} R \right) \right]$$