11

Columnas

La imagen completa

Columnas

Mapa de análisis

Una columna es un miembro relativamente largo esbelto cargado a compresión

El modo de falla de una columna se llama *pandeo*, un término común para la condición de *inestabilidad elástica*, cuando la carga sobre una columna inicialmente recta hace que se flexione significativamente. Si la carga se incrementa a una pequeña cantidad a partir de la carga de pandeo, la columna se colapsaría de inmediato, lo que constituye una situación muy peligrosa.

- ¿Cómo determinamos cuando un miembro sometido a compresión es largo y esbelto?
- ¿Cómo determinamos la magnitud de la carga a la que ocurriría el pandeo?
- ¿Qué clase de perfiles de sección transversal se prefieren para columnas?
- ¿Qué influencia tiene la forma de sujeción de los extremos de una columna en la carga de pandeo?
- ¿Qué estándares de la industria se aplican a columnas?

Éstos y otros detalles sobre el análisis y diseño de columnas se presentan en este capítulo.

Actividad

Exploremos el concepto de columna. Busque algunos ejemplos a su alrededor que se ajusten a esta definición; luego describa cada uno de ellos, dando su longitud, el perfil y dimensiones de su sección transversal y el material del que esté hecho. He aquí algunos ejemplos para comenzar.

Una regla de un metro, por lo general fabricada de madera o aluminio. Obviamente su longitud es de 1.0 m. La sección transversal es por lo general de aproximadamente 30 mm de ancho por 4 mm de espesor, lo que la hace ver larga y esbelta.

Una regla de acero de 6 in (152 mm). Puede que haya utilizado una donde operaba máquinas–herramienta cortametales o tornos de madera. Nuevamente su longitud es obviamente de 6.00 in (152 mm). Se hace con una solera plana de acero, de 0.75 in de ancho y 0.020 in de espesor (19 mm × 0.50 mm). Aun cuando es mucho más corta que la regla de un metro, es más delgada, es decir, más esbelta. Tanto la longitud como la esbeltez importan.

Una espiga de madera que puede adquirir en una ferretería. Tal vez de 36 in de largo y 3/8 in de diámetro (914 mm × 9.5 mm).

¿Qué ejemplos ha encontrado?

Ahora tratemos de cargar uno de estos elementos con una carga de compresión axial directa. Esto significa que la línea de acción de la carga estará en línea con el eje mayor de la columna. Simplemente apóyela en la mesa o el piso y empújela hacia abajo con su mano. Trate de empujarla recta, hacia abajo, y no lateralmente pero no la sujete firmemente con los dedos. ¡Tenga cuidado de no empujarla con demasiada fuerza o se romperá!

¿Qué sucedió?

A continuación describimos el comportamiento de la regla de un metro de madera. Al cargarla lentamente, observamos que es capaz de soportar una carga muy pequeña mientras permanece recta. Pero sin mucho esfuerzo, podemos hacer que la vara se flexione notablemente. Este fenómeno se llama *pandeo*. ¡Tenga cuidado! Con sólo un modesto incremento de la carga después de que ocurre el pandeo, la vara se rompería con facilidad. Observe que la regla de un metro se pandea con respecto a la dimensión delgada de su sección transversal. La figura 11–1 ilustra lo que sucedió. La figura 11–2(a) muestra una vista lateral. Probablemente hubiera pronosticado lo que sucedió basado en su propia experiencia. Más adelante, cuantificaremos por qué sucedió eso.

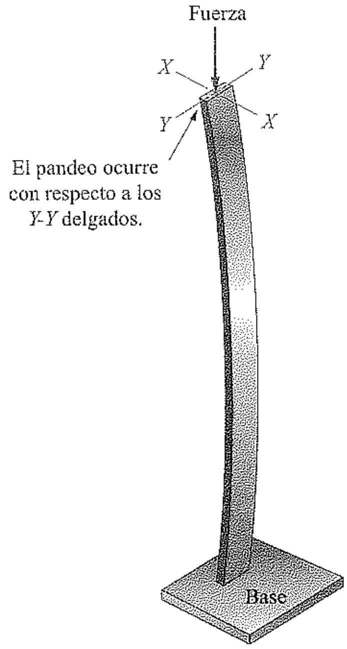


FIGURA 11–1
Ilustración del pandeo de una vara de un metro.

Ahora cambiemos el procedimiento un poco. Parece que la regla de un metro tiende a pandearse cerca de su punto medio, es decir, en el punto situado a 0.50 m. ¿Qué pasaría si utilizamos algún soporte lateral a ambos lados de dicho punto? Trate de hacerlo si dispone de una regla de un metro. Coloque sus dedos a ambos lados para limitar la tendencia a pandearse hacia fuera. Ahora empújela de nuevo hacia abajo como ya lo había hecho antes.

¿Qué sucedió?

Ahora podemos aplicar una carga mucho más pesada a la vara sin que se pandee. Pero existe un punto en el que la carga es suficientemente elevada como para ver una forma de pandeo bastante diferente. La mitad inferior y la mitad superior de la vara se pandean una en un sentido y la otra en el opuesto. En realidad, parece que la vara adoptará la forma de una onda seno completa. Analizaremos esta observación más adelante.

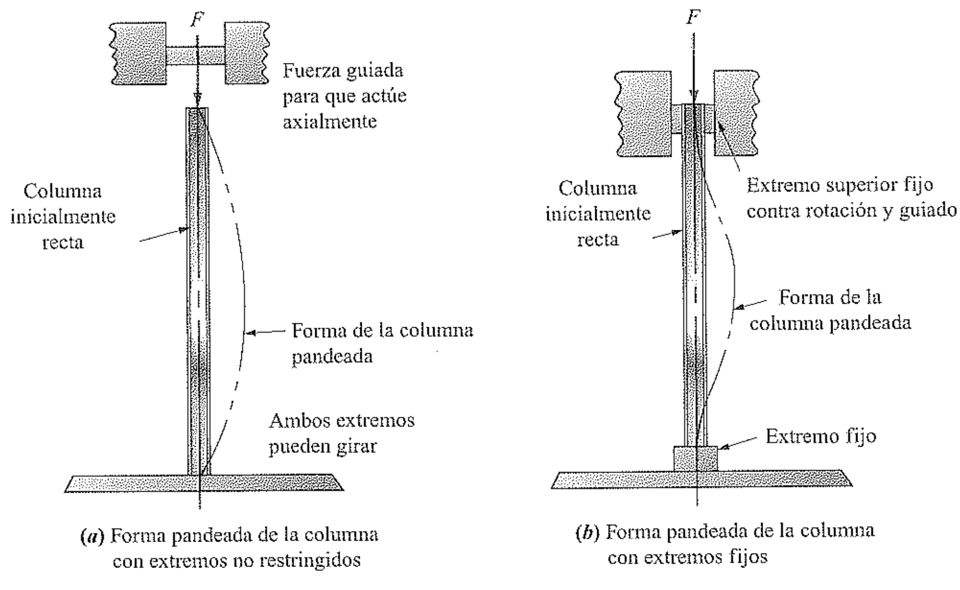


FIGURA 11–2
Comparación de las formas que adoptan las columnas pandeadas.

Cambiemos el procedimiento de nuevo. Sujete ambos extremos de la vara con firmeza y trate con toda su fuerza de que no gire al mismo tiempo que aplica una carga axial que producirá el pandeo.

¿Qué sucedió?

En primera, habrá notado que se requiere una fuerza mucho más grande para pandearla. Además, habrá notado que la forma de la vara pandeada es diferente de la que se produjo cuando no sujetó los extremos. Dos factores intervienen en este caso. La sujeción de la vara con sus puños acorta efectivamente la columna en aproximadamente 90 mm (3.5 in) en cada extremo. Como la columna es más corta, se requiere una carga más elevada para pandearla. Pero además, su esfuerzo para evitar que los extremos giren produjo la forma pandeada similar a la mostrada en la figura 11–2(b). En esencia *fijó los extremos*. Más adelante también examinaremos este fenómeno.

¿Son todas las columnas que encontró perfectamente rectas?

Probablemente no. De todas las que se sometieron a prueba aquí, la mayoría tendió a pandearse en una dirección particular porque inicialmente ya estaban combadas. Al empujarlas hacia abajo se produjo el efecto adicional de flexionar la sección encorvada aún más en la misma dirección. También exploraremos ese fenómeno más adelante.

Los elementos que describimos aquí no están hechos para soportar cargas de compresión axial. Simplemente sirvieron para demostrar el pandeo.

¿Qué ejemplos de columnas puede encontrar que sean más sustanciales y que fueron diseñados para ser suficientemente resistentes y estables para soportar cargas de compresión axial cuantificables?

Es posible que no pueda llevar todos estos ejemplos al salón de clases, laboratorio u oficina, pero he aquí algunos.

- Las columnas verticales de la estructura de acero de un edificio. Las columnas inferiores de un edificio de varios pisos deben ser resistentes y rígidas para sostener todo el peso arriba de ellas. Aun en un edificio de un piso, deben sostener la estructura de techo y, posiblemente, una carga de nieve encima de ella.
- Los postes de acero que sostienen una viga de un lado a otro del sótano de una casa. La viga soporta las viguetas del piso de arriba y todo el peso de los muebles y las personas que habitan la casa. Los postes transfieren esa carga al piso del sótano o a los cimientos. Es probable que los postes estén hechos de tubos de acero o de secciones estructurales huecas (HSS). Éstas son perfiles eficientes para una columna, como veremos más adelante en este capítulo.
- La varilla cilíndrica de un actuador hidráulico: Es posible que lo haya visto en un equipo de construcción, en una máquina agrícola o en un sistema automático industrial. Algunas de estas varillas cilíndricas empujan con gran fuerza y deben ser diseñadas para que no se pandeen al salir del cilindro.

¿Qué otros ejemplos ha encontrado?

Ahora resumamos las observaciones que hicimos hasta este punto:

- Demostramos que un miembro largo esbelto tiende a pandearse cuando se somete a una carga de compresión axial. Pero ¿cuándo un miembro se considera largo y esbelto? Más adelante definimos el término *relación de esbeltez* para cuantificar esa situación. Es una función de la longitud de la columna, del método de sujeción de sus extremos y del perfil y tamaño de la sección transversal de la columna.
- Demostramos que una columna es capaz de soportar una cierta magnitud de carga axial antes de que comience a pandearse. Luego, el inicio del pandeo es bastante repentino. ¿Con qué carga se pandeará? Mostramos varios métodos de predecir este suceso en este capítulo.

- Demostramos que la forma de sujeción de los extremos de una columna afecta la carga de pandeo. Más adelante daremos más detalles sobre lo anterior cuando utilicemos el término *fijación de los extremos*.
- Las columnas que encontramos posiblemente estaban hecha de diferentes materiales, tales como acero, aluminio, madera o plástico. ¿Qué efecto tiene el material en su tendencia a pandearse? En este capítulo demostramos que el módulo de elasticidad, E, del material, tiene un efecto importante en la tendencia de una columna larga a pandearse. En el caso de columnas más cortas, la resistencia a la cedencia es un factor.
- Algunas de las columnas que encontramos inicialmente estaban encorvadas. Aparentemente se pandearon con una carga menor que las rectas y siempre en la dirección de la encorvadura inicial. ¿Podemos cuantificar eso? Sí, se presentarán métodos adicionales de analizar columnas encorvadas y aquellas en las que la carga se aplica fuera del eje (llamadas *columnas excéntricamente cargadas*).

11–1 OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

Al término de este capítulo, usted podrá:

1. Definir *columna*.
2. Diferenciar entre columna y miembro corto sometido a compresión.
3. Describir el fenómeno de *pandeo*, también llamado *inestabilidad elástica*.
4. Definir *radio de giro* de la sección transversal de una columna y ser capaz de calcular su magnitud.
5. Entender que se espera que una columna se pandee con respecto al eje para el cual el radio de giro es mínimo.
6. Definir *factor de fijación de los extremos*, K, y especificar el valor apropiado según la forma de soportar los extremos de una columna.
7. Definir *longitud efectiva*, L_e, *relación de esbeltez* y *relación de esbeltez de transición* (también llamada *constante de columna*, C_c) y calcular sus valores.
8. Utilizar los valores de la relación de esbeltez y la constante de columna para determinar cuándo una columna es *larga* o *corta*.
9. Utilizar la *fórmula de Euler* para calcular la carga de pandeo crítica para columnas largas y la *fórmula de J. B. Johnson* para columnas cortas.
10. Aplicar un factor de diseño a la carga de pandeo crítica para determinar la *carga permisible* en una columna.
11. Reconocer perfiles eficientes para secciones transversales de columna.
12. Diseñar columnas para que soporten con seguridad cargas de compresión axiales dadas.
13. Aplicar las especificaciones del American Institute of Steel Construction (AISC) y de la Aluminum Association al análisis de columnas.
14. Analizar columnas que inicialmente están encorvadas para determinar la carga de pandeo crítica.
15. Analizar columnas en las cuales la carga aplicada actúa excéntrica con respecto a su eje.

11–2 RELACIÓN DE ESBELTEZ

Se ha definido una columna como un miembro esbelto relativamente largo cargado a compresión. Esta descripción se planea en términos relativos y no es muy útil para el análisis.

La medida de esbeltez de una columna debe tener en cuenta la longitud, el perfil de la sección transversal y las dimensiones de la columna, además de la forma de sujetar los extremos de la columna en las estructuras que generan las cargas y reacciones en la columna. La medida de esbeltez comúnmente utilizada es la *relación de esbeltez*, definida como

Relación de esbeltez

$$SR = \frac{KL}{r} = \frac{L_e}{r} \tag{11–1}$$

donde L = *longitud real* de la columna entre los puntos de apoyo o de restricción lateral.

K = *factor de fijación de los extremos.*

L_e = *longitud efectiva*, teniendo en cuenta la manera de fijar los extremos (observe que $L_e = KL$)

r = *radio de giro mínimo* de la sección transversal de la columna.

Cada uno de estos términos se analiza a continuación.

Longitud real, L. En una columna simple con la carga aplicada en uno de sus extremos y la reacción que se genera en el otro, la longitud real es, obviamente, la longitud entre sus extremos. Pero en el caso de componentes de estructuras cargados a compresión que disponen de medios de restringir el miembro lateralmente para evitar que se pandee, la longitud real se considera entre los puntos de restricción. Cada una de las partes, entonces, se considera una columna aparte.

Factor de fijación de los extremos, K. El factor de fijación de los extremos mide el grado al cual cada extremo de la columna está limitado contra rotación. En general se consideran tres tipos clásicos de conexiones de los extremos: el extremo de pasador, el extremo fijo y el extremo libre. La figura 11–3 muestra estos tipos de extremo en varias combinaciones junto con los valores correspondientes de K. Observe que se dan dos valores de K. Uno es el valor teórico y el otro es el que por lo general se utiliza en situaciones prácticas, aunque hay que reconocer que es difícil lograr el extremo verdaderamente fijo, como se verá más adelante. Vea también la sección 11–6.

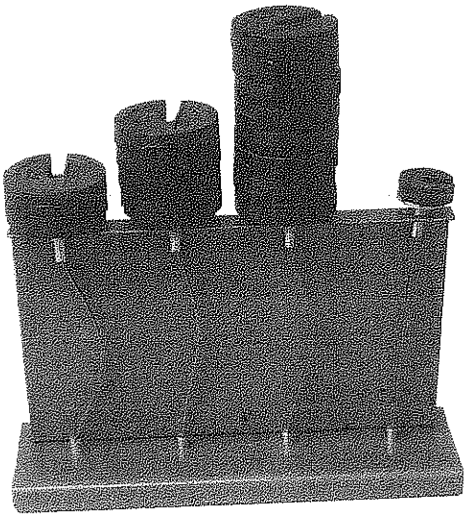
La figura 11–3(a) muestra un dispositivo de demostración comercialmente disponible que ilustra la rigidez y resistencia relativas al pandeo de cuatro condiciones de fijación de los extremos. Los tamaños de las pilas de pesas colocadas sobre el extremo superior de los primeros tres indican la carga aproximada a la cual se inicia el pandeo. La carga muy pequeña en el extremo derecho de la columna (la condición de fijo–libre) no representa la carga de pandeo verdadera porque la columna es inestable por sí misma y se flexiona hacia un lado con facilidad si hay algún grado de desalineación de la carga con respecto al eje de la columna.

Los extremos de pasador de columnas en esencia están imposibilitados contra rotación. Cuando una columna con dos extremos de pasador se pandea, asume la forma de una curva uniforme entre sus extremos, como se muestra en la figura 11–3(b). Éste es el caso básico de pandeo de una columna, y el valor de $K = 1.0$ se aplica a columnas con dos extremos de pasador. Un tipo ideal de extremo de pasador es la articulación de rótula libre de fricción que permite que una columna gire en cualquier dirección con respecto a cualquier eje. En el caso de una junta de pasador cilíndrico, se permite la rotación libre con respecto al eje del pasador, pero se limita en cierto grado en el plano perpendicular al eje. Por esta razón se debe tener cuidado al aplicar factores de fijación a pasadores cilíndricos. Se supone que se guía al extremo de pasador de modo que la línea de acción de la carga axial no cambie.

La combinación de un extremo fijo y una de pasador se muestra en la figura 11–3(c). Observe que la forma pandeada se aproxima al extremo fijo con una pendiente cero mientras que el extremo de pasador gira libremente. El valor teórico de $K = 0.7$ se aplica a ese tipo de fijación de los extremos en tanto que $K = 0.80$ se recomienda para usos prácticos.

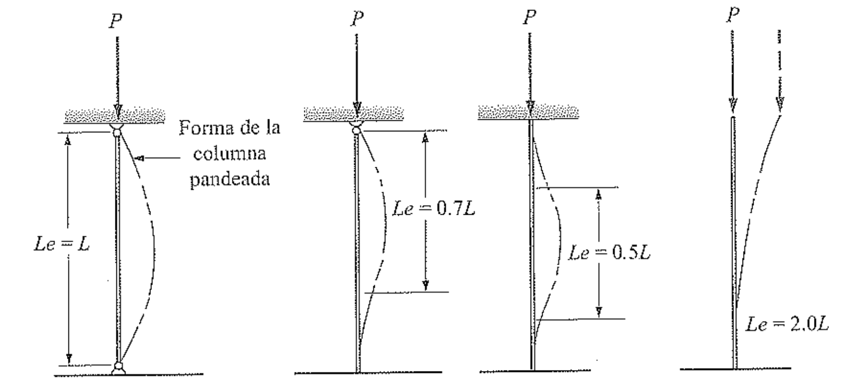
En teoría, los extremos fijos impiden perfectamente la rotación de la columna en sus extremos. A medida que la columna tiende a pandearse, la curva de flexión del eje de la columna debe aproximarse al extremo fijo con una pendiente cero, como se ilustra en la figura 11–3(d). La columna se arquea hacia fuera a la mitad pero exhibe dos puntos de inflexión donde se invierte la dirección de la curvatura cerca de los extremos. El valor teórico del factor de

FIGURA 11–3
Valores de K para la longitud efectiva, $L_e = KL$, con cuatro fijaciones de extremo diferentes.



(*a*)

(a) Demostrador de fijación de extremos comercialmente disponible
(Fuente: P.A. Milton Ltd, Hi-Tech, Hampshire, Inglaterra)



	Ambos extremos de pasador	Un extremo fijo y el otro de pasador	Ambos extremos fijos	Un extremo fijo y otro libre
Valores teóricos	$K = 1.0$	$K = 0.7$	$K = 0.5$	$K = 2.0$
Valores prácticos	$K = 1.0$	$K = 0.8$	$K = 0.65$	$K = 2.10$
	(*b*)	(*c*)	(*d*)	(*e*)

fijación de los extremos es $K = 0.5$, el cual indica que la columna actúa como si fuera sólo la mitad de larga de lo que realmente es. Las columnas con extremos fijos son mucho más rígidas que las columnas con extremos de pasador y por consiguiente son capaces de soportar cargas mayores antes de pandearse. Se debe entender que es muy difícil fijar perfectamente los extremos de una columna. Se requiere que la conexión a la columna sea rígida y que la estructura a la que se transfieren las cargas también sea rígida. Por esta razón, en la práctica se recomienda el valor más alto de $K = 0.65$.

El extremo libre de una columna gira y también se traslada. Como puede moverse en cualquier dirección, éste es el peor caso de fijación de los extremos de una columna. El único modo práctico de utilizar una columna con una extremo libre es fijar el extremo opuesto, como se ilustra en la figura 11–3(e). Una columna como ésa en ocasiones se conoce como *asta de bandera*, porque el extremo fijo se comporta como un asta de bandera profundamente insertada en un orificio de ajuste forzado, mientras que el extremo libre puede moverse en cualquier dirección. Citada como condición de extremos fijo y libre, el valor teórico de K es 2.0. Un valor práctico es $K = 2.10$.

Longitud efectiva, L_e. La longitud efectiva combina la longitud real con el factor de fijación de los extremos; $L_e = KL$. En los problemas incluidos en este libro utilizamos los valores prácticos recomendados de factor de fijación de los extremos, como se muestra en la figura 11–3. En resumen, se utilizarán las siguientes relaciones para calcular la longitud efectiva:

Longitud efectiva

1. Columnas con extremos de pasador: $L_e = KL = 1.0(L) = L$
2. Columnas con extremos de pasador y fijo: $L_e = KL = 0.80(L)$
3. Columnas con extremos fijos: $L_e = KL = 0.65(L)$
4. Columnas con extremos fijos: $L_e = KL = 2.10(L)$

Radio de giro, r. La medida de la esbeltez de la sección transversal de una columna es su radio de giro, r, definido como

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} \tag{11–2}$$

donde I = momento de inercia de la sección transversal de la columna con respecto a uno de los ejes principales

A = área de la sección transversal.

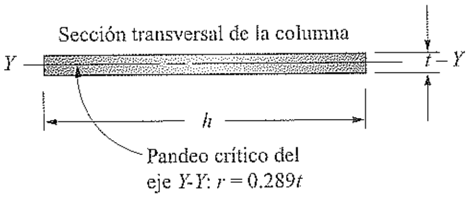
En virtud de que tanto I como A son propiedades geométricas de la sección transversal, el radio de giro, r, también lo es. En el apéndice A–1 se dan fórmulas para calcular el radio de giro, r, de varios perfiles comunes. Además, se da r junto con otras propiedades de algunos de los perfiles estándar que aparecen en el apéndice. Para aquellos para los que no se da r, los valores de I y A están disponibles y se puede utilizar la ecuación (11–2) para calcular r de manera muy simple. La sección 6–10 del capítulo 6 incluye una exposición adicional del radio de giro con ejemplos y problemas prácticos.

Observe que el valor del radio de giro, r, depende del eje con respecto al cual se tiene que calcular. En la mayoría de los casos, se debe determinar el eje con respecto al cual el *radio de giro es mínimo*, porque es el eje con respecto al cual la columna se pandearía. Considere, por ejemplo, una columna de sección rectangular cuyo ancho es mucho mayor que su espesor, como se ilustra en la figura 11–1. La regla de un metro demuestra que cuando se carga a compresión axial con poca o ninguna restricción en los extremos, siempre se pandeará con respecto al eje que pasa por la dimensión mínima.

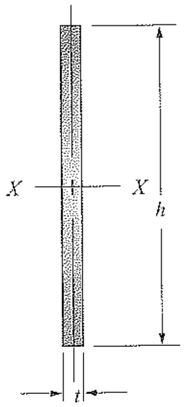
Consulte la figura 11–4 para ilustrar este punto. En ella se muestran ilustraciones de la sección transversal rectangular esbelta de la regla de un metro ilustrada en la figura 11–1. La parte (a) la muestra con respecto al eje centroidal Y–Y. El espesor de rectángulo es t y su ancho es h. Por consiguiente, el momento de inercia del rectángulo con respecto al eje Y–Y es

$$I_Y = ht^3/12$$

FIGURA 11–4
Radio de giro de la sección transversal de una columna rectangular esbelta.



(*a*) Radio de giro del eje *Y-Y*



Para el eje *X-X*: $r = 0.289h$

(*b*) Radio de giro del eje *X-X*

El área es simplemente

$$A = th$$

Ahora, con la ecuación (11–2) calculamos la relación del radio de giro, r_Y.

$$r_Y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}} = \sqrt{\frac{ht^3/12}{th}} = \sqrt{\frac{t^2}{12}} = \frac{t}{\sqrt{12}} = 0.289t$$

Asimismo, si utilizamos la figura 11–4(b), podemos obtener una ecuación para r_X.

$$I_X = th^3/12$$
$$A = th$$
$$r_X = \sqrt{\frac{I_X}{A}} = \sqrt{\frac{th^3/12}{th}} = \sqrt{\frac{h^2}{12}} = \frac{h}{\sqrt{12}} = 0.289h$$

Observe que como $h > t$, $r_X > r_Y$ y por ende r_Y es el radio de giro mínimo de la sección.

Para las vigas de patín ancho (apéndice A–7) y las vigas American Standard (apéndice A–8), el valor mínimo de r es el calculado con respecto al eje *Y–Y*; es decir,

$$r_{\min} = r_Y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}}$$

Asimismo, para secciones estructurales rectangulares huecas (HSS) (apéndice A–9), el radio de giro mínimo es el calculado con respecto al eje *Y–Y*. Los valores de r se dan en la tabla.

Para ángulos estructurales de acero, llamados perfiles L, ni el eje *X–X* ni el eje *Y–Y* proporcionan el radio de giro mínimo. Como se ilustra en el apéndice A–5, el $r_{\min}$ se calcula con respecto al eje *Z–Z*, con los valores dados en la tabla.

Para secciones simétricas, el valor de r es el mismo con respecto a cualquier eje principal. Tales perfiles son o las secciones circulares sólidas o huecas y las secciones cuadradas sólidas o huecas.

Resumen del método para calcular la relación de esbeltez

1. Determine la longitud real de la columna, L, entre sus puntos extremos o entre puntos de restricción lateral.
2. Determine el factor de fijación de los extremos con base en el tipo de apoyo de los extremos o mediante la figura 11–3.
3. Calcule la longitud efectiva, $L_e = KL$.
4. Calcule el radio de giro *mínimo* de la sección transversal de la columna.
5. Calcule la relación de esbeltez con

$$SR = \frac{L_e}{r_{\text{mín}}}$$

11–3 RELACIÓN DE ESBELTEZ DE TRANSICIÓN

¿Cuándo se considera larga una columna? La respuesta a esta pregunta requiere la determinación de la *relación de esbeltez de transición*, o constante de columna C_c.

Relación de esbeltez de transición

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{s_y}} \tag{11–3}$$

Para determinar si una columna dada es larga o corta, se aplican las reglas siguientes.

Si la relación de esbeltez efectiva real L_e/r es mayor que C_c, entonces la columna es larga y para analizarla se deberá utilizar la fórmula de Euler, definida en la siguiente sección.

Si la relación real L_e/r es menor que C_c, entonces la columna es corta. En este caso, se deberá utilizar o la fórmula de J. B. Johnson, reglamentos especiales o la fórmula de esfuerzo de compresión directa, como se verá en secciones posteriores.

En los casos en que se analiza una columna para determinar la carga que soportará, deberá calcularse el valor de C_c y la relación real L_e/r para determinar qué método de análisis se debe utilizar. Observe que C_c depende de la resistencia a la cedencia s_Y y del módulo de elasticidad E del material. Cuando se trabaja con acero, por lo general se considera que E es de 207 GPa (30×10^6 psi). Con este valor y suponiendo un intervalo de valores de resistencia a la cedencia, obtenemos los valores de C_c mostrados en la figura 11–5. Tenga en cuenta que en general se considera que el valor de E para aceros estructurales es de 200 GPa (29×10^6 psi), con la curva desplazada hacia abajo un poco.

Para aluminio, E es aproximadamente de 69 GPa (10×10^6 psi). Los valores correspondientes de C_c se muestran en la figura 11–6.

FIGURA 11–5
Relación de esbeltez de transición C_c contra la resistencia a la cedencia de acero.

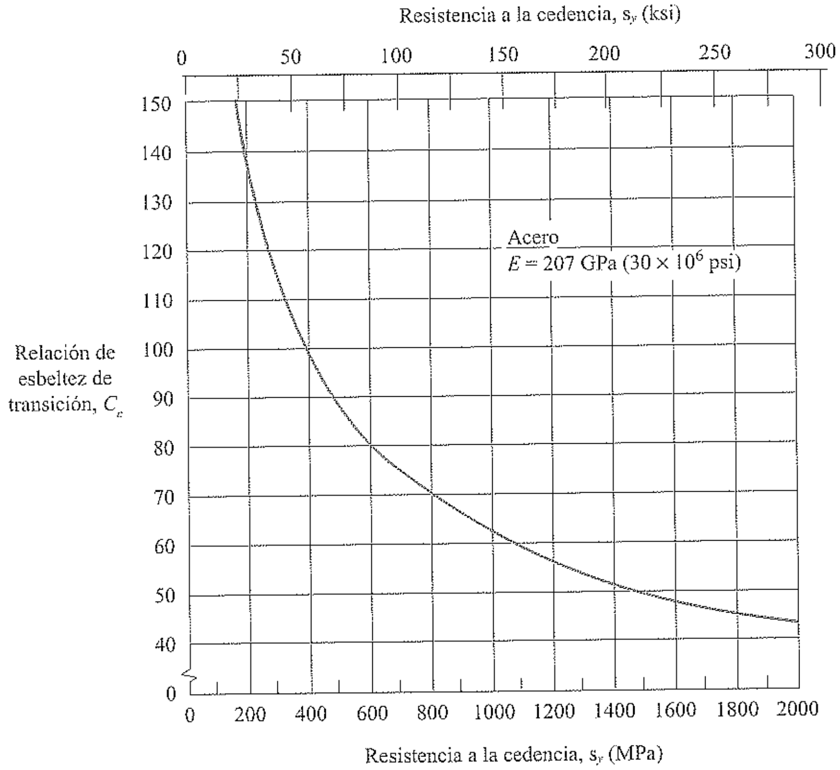
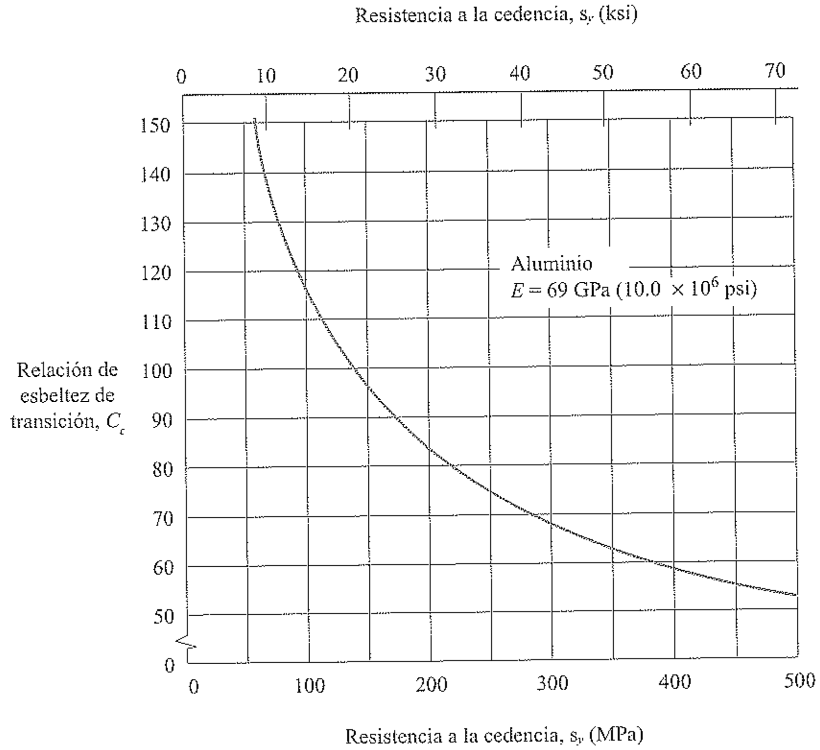


FIGURA 11–6
Relación de esbeltez de transición C_c contra la resistencia a la cedencia de aluminio.



11–4 FÓRMULA DE EULER PARA COLUMNAS LARGAS

Para columnas largas cuya relación de esbeltez es mayor que el valor de transición C_c, se puede utilizar la fórmula de Euler para predecir la carga crítica con la que se espera que la columna se pandee. La fórmula es

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EA}{(L_e/r)^2} \quad \textbf{(11–4)}$$

Fórmula de Euler para columnas largas

donde A es el área de la sección transversal de la columna. Otra forma de expresar esta fórmula está en función del momento de inercia teniendo en cuenta que $r^2 = I/A$. Entonces, la fórmula se escribe como

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \quad \textbf{(11–5)}$$

11–5 FÓRMULA DE J. B. JOHNSON PARA COLUMNAS CORTAS

Si la relación de esbeltez efectiva real, L_e/r es menor que el valor de transición C_c, la fórmula de Euler predice una carga crítica exorbitante. Una fórmula recomendada para el diseño de máquinas en el intervalo de L_e/R menor que C_c es la fórmula de J. B. Johnson.

$$P_{cr} = As_y\left[1 - \frac{s_y (L_e/r)^2}{4\pi^2 E}\right] \quad \textbf{(11–6)}$$

Fórmula de J. B. Johnson para columnas cortas

Ésta es una forma de un conjunto de ecuaciones llamadas fórmulas parabólicas y concuerda perfectamente con el comportamiento de las columnas de acero de maquinaría típica.

La fórmula de Johnson da el mismo resultado que la fórmula de Euler de la carga crítica con la relación de esbeltez de transición C_c. Entonces, en el caso de columnas muy cortas, la carga crítica se aproxima a la pronosticada por la ecuación del esfuerzo de compresión directa, $\sigma = P/A$. Por consiguiente, se podría decir que la fórmula de Johnson se aplica mejor a columnas de mediana longitud.

11–6 RESUMEN – FÓRMULAS DE PANDEO

Esta sección resume el fundamento de las fórmulas de Euler y Johnson para el análisis de columnas y da más detalles sobre el comportamiento de columnas hechas de varios materiales y relaciones de esbeltez.

El fenómeno de pandeo no es una falla del material del cual está hecha la columna; es una falla de la columna en su conjunto para conservar su forma. Este tipo de falla se llama *inestabilidad elástica.*

Recuerde el ejercicio que realizó en la sección de la imagen completa de este capítulo. A medida que cargaba una columna larga esbelta, tal como la regla de un metro, observó que se pandeaba con una carga moderada. Si se retiraba la carga después de la ocurrencia del pandeo, se observaba que la columna no sufría daños. No había cedencia o fractura del material.

Para diseñar una columna segura, debe asegurarse de que permanezca elásticamente estable. El fundamento de las fórmulas de Euler y Johnson se desarrolla a partir del análisis de esfuerzo conocido como *elasticidad.* La referencia 6 es una fuente útil para este desarrollo.

El principio de estabilidad elástica establece que una columna es estable si conserva su forma recta a medida que se incrementa la carga. No obstante, existe un nivel de carga al cual la columna es incapaz de conservar su forma. Entonces se pandea. La carga a la cual ocurre el pandeo se conoce como *carga de pandeo crítica*, P_{cr}. Obviamente, como diseñador de la columna, debe asegurarse de que la carga real aplicada a la columna sea mucho menor que P_{cr}.

Cuando la carga axial sobre una columna sea menor que la carga de pandeo crítica, la rigidez de la columna es suficiente para resistir la tendencia a desviarse de la orientación de línea recta de su eje neutro. Incluso cuando la carga está un poco desviada del eje, la columna es capaz de conservar su forma. Podemos visualizar lo anterior si recurrimos a la figura 11–2.

La parte (a) muestra una columna recta con un extremo de pasador que soporta una carga de compresión axial. También se muestra, de una manera exagerada, que en el punto de pandeo incipiente, la columna adopta la forma de una media onda seno. Cualquier desviación del eje neutro con respecto a una línea recta introduce flexión en la columna. Cuando la fuerza aplicada es menor que P_{cr}, la rigidez de la columna es suficiente para resistir esta deformación y mantener la rectitud de la columna. Actúa como si fuera un resorte, en ocasiones conocido como *muelle*, para que la columna recupere su forma recta siempre que exista la tendencia a desviarse. El matemático suizo Leonhard Euler (1707–1783) utilizó las técnicas matemáticas de ecuaciones diferenciales para analizar esta condición y producir lo que ahora se conoce como *fórmula de Euler* en su honor [ecuación 11–4)].

Reconocer que la columna con extremo de pasador deformada pandeada adopta la forma de una media onda seno puede ayudarnos a visualizar por qué las diferentes condiciones de fijación de los extremos afectan la magnitud de la carga de pandeo crítica. Consulte la figura 11–3, que muestra la forma pandeada de cuatro columnas con diferentes modos de fijación de los extremos. La explicación del valor teórico de K, el factor de fijación de los extremos, se da a continuación.

a. La parte (b) es el diseño con extremos de pasador y toda la longitud se ajusta a la forma onda seno después de que se inicia el pandeo. Ésta es la razón de que $L_e = L$.

b. La parte (d) muestra el diseño con extremos fijos, y la forma de onda seno se presenta sólo a lo largo de la mitad de la columna. Por consiguiente, la longitud efectiva teórica es $L_e = 0.5L$.

c. La parte (e) muestra el diseño con extremos libres y la forma deformada de la columna es de sólo un cuarto de la onda seno. Para completar la media onda seno que caracteriza a la forma pandeada, se tendría que extender la línea curva del eje neutro deformado a una distancia igual *por debajo* del extremo inferior, el extremo fijo de la columna. Por consiguiente, la longitud efectiva es $L = 2.0L$.

d. La parte (c) muestra el diseño con extremos fijos y de pasador. Lógicamente se ve que este diseño es un término medio entre los mostrados en las partes (b) y (d). En realidad, la forma de onda seno se presenta en aproximadamente los dos tercios superiores de la columna. Por consiguiente, la longitud efectiva teórica es $L_e = 0.7L$.

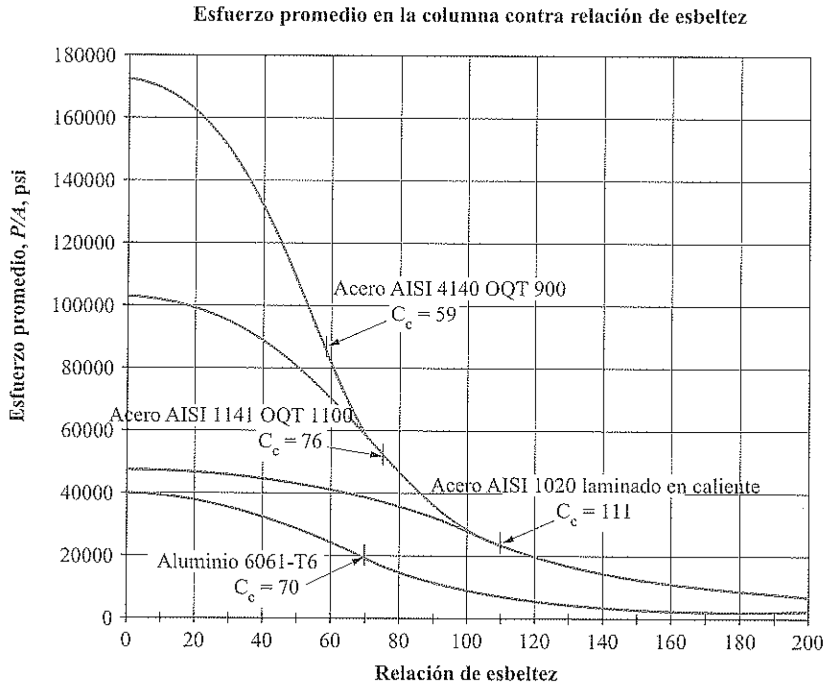
De nueva cuenta, como es muy difícil producir un extremo perfectamente fijo para una columna, se utilizan los valores de diseño del factor de fijación de los extremos, K, en problemas prácticos como los incluidos en este libro.

Comparación de las fórmulas de Euler y Johnson. Observamos que la fórmula de Euler es válida sólo para columnas cuya relación de esbeltez es mayor que la relación de esbeltez de transición, C_c. Cuando la relación L_e/r es menor que C_c, se recomienda la fórmula de Johnson. Entonces, con valores muy pequeños de L_e/r, el resultado obtenido con la fórmula de Johnson se aproxima a la carga a la cual el material de la columna fallaría por cedencia bajo la compresión axial directa.

Otra forma de examinar estos conceptos es dividir tanto la fórmula de Euler [ecuación (11–4)] como la fórmula de Johnson [ecuación (11–6)] entre el área de la sección transversal, A. En ese caso, el lado izquierdo de la fórmula es P/A y representa un esfuerzo promedio que actúa en la sección transversal de la columna.

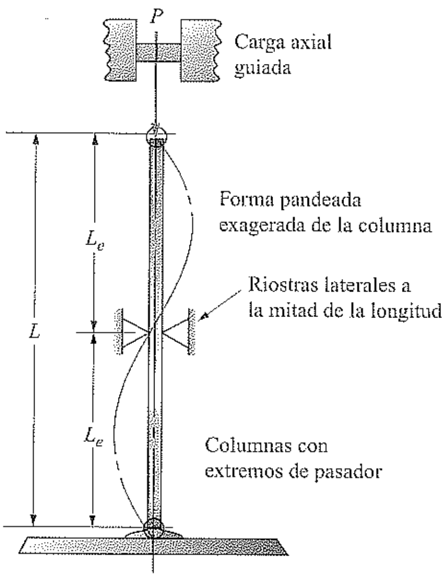
La figura 11–7 ilustra estos conceptos en forma gráfica. El eje vertical es el esfuerzo promedio en la columna cuando la carga axial es igual a la carga de pandeo crítica. El eje horizontal es la relación de esbeltez, L_e/r. El módulo de elasticidad, E, y la resistencia a la cedencia, s_y, del material afectan la carga de pandeo crítica y, por lo tanto, la gráfica presenta una familia de curvas representativas de diferentes materiales. Para un material dado, la parte más a la derecha es para valores grandes de $L_e/r > C_c$. En esta región, el comportamiento de una columna hecha de cualquier aleación del material se ajusta a la fórmula de Euler. Con $L_e/r = C_c$, las fórmulas de Euler y Johnson son tangentes. Entonces, con $L_e/r > C_c$, se aplica la fórmula de Johnson. Por último, en el caso de columnas muy cortas, el esfuerzo promedio tiende a la resistencia a la cedencia del material que representa la falla por compresión directa sin ningún efecto de pandeo.

FIGURA 11–7
Esfuerzo promedio en la columna *vs.* la relación de esbeltez.



Columnas lateralmente apuntaladas. Recuerde el ejercicio descrito en la sección de La imagen completa. Cuando la regla de un metro larga y esbelta se mantenía más o menos a la mitad de su longitud, era capaz de soportar una carga mucho mayor antes de que se pandeara. El apuntalamiento lateral divide efectivamente la columna en dos columnas distintas, de la mitad de la longitud de la columna completa. La carga de pandeo crítica se incrementa entonces dramáticamente. Cuando ocurre el pandeo, cada una de las mitades de la columna se deforma y adopta la forma de una media onda seno como se muestra en la figura 11–8. La columna completa adopta entonces la forma de una onda seno completa. Más adelante se ilustra este resultado con un ejemplo.

FIGURA 11–8
Columna lateralmente arriostrada.



11–7 FACTORES DE DISEÑO PARA COLUMNAS Y CARGA PERMISIBLE

Cuando una columna falla por pandeo y no por cedencia o por falla máxima del material, los métodos antes utilizados para calcular el esfuerzo de diseño no se aplican a columnas.

En vez de eso se calcula una *carga permisible* dividiendo la carga de pandeo crítica calculada con la fórmula de Euler [ecuación (11.4)] o la fórmula de Johnson [ecuación (11–6)] entre un factor de diseño, N. Es decir,

Carga permisible sobre una columna

$$P_a = \frac{P_{cr}}{N} \tag{11–7}$$

donde P_a = carga permisible, segura
P_c = carga de pandeo crítica
N = factor de diseño

La selección del factor de diseño es la responsabilidad del diseñador a menos que el proyecto esté clasificado dentro de la categoría de un reglamento. Los factores a considerar en la selección de un factor de diseño son similares a los utilizados para determinar factores de diseño aplicados a esfuerzos. Un factor común utilizado en el diseño mecánico es $N = 3.0$, seleccionado por la incertidumbre de las propiedades del material, la fijación de los extremos, la rectitud de la columna o la posibilidad de que la carga se aplique con algo de excentricidad y no a lo largo de la columna. En ocasiones se utilizan factores mayores en situaciones críticas y para columnas muy largas.

En la construcción de edificios, donde las especificaciones del American Institute of Steel Construction, AISC, rigen el diseño, se recomienda un factor de 1.92 para columnas largas. La Aluminum Association requiere $N = 1.95$ para columnas largas. Consulte las secciones 11–12 y 11–13.

11–8 RESUMEN – MÉTODO DE ANÁLISIS DE COLUMNAS

El objetivo de esta sección es resumir los conceptos presentados en las secciones 11–3 a 11–7 en un procedimiento que pueda ser utilizado para analizar columnas. Se puede aplicar a una columna recta de sección transversal uniforme a lo largo de ella, en la que la carga de compresión se aplica en línea con su eje centroidal.

Método de análisis de columnas

En principio, se supone que se conocen los siguientes factores:

1. La longitud real, L
2. La forma de conectar la columna a sus apoyos
3. La forma de la sección transversal de la columna y sus dimensiones
4. El material del cual está hecha la columna

Entonces el procedimiento es:

1. Determine el factor de fijación de los extremos, K, comparando la forma de conectar la columna a sus apoyos con la información de la figura 11–3.
2. Calcule la longitud efectiva, $L_e = KL$.
3. Calcule el valor mínimo del radio de giro de la sección transversal con $r_{mín} = \sqrt{I_{mín}/A}$; o determine rmín en las tablas de datos.
4. Calcule la relación de esbeltez máxima con.

$$SR_{máx} = \frac{L_e}{r_{mín}}$$

5. Con el módulo de elasticidad, E, y la resistencia a la cedencia, sY, del material, calcule la constante de columna,

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{s_y}}$$

6. Compare el valor de SR con C_c.
   a. Si $SR > C_c$, la columna es larga. Use la fórmula de Euler para calcular la carga de pandeo crítica,

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EA}{(SR)^2} \qquad \textbf{(11–4)}$$

   b. Si $SR < C_c$, la columna es corta. Use la fórmula de Johnson para calcular la carga de pandeo crítica,

$$P_{cr} = As_y\left[1 - \frac{s_y(SR)^2}{4\pi^2 E}\right] \qquad \textbf{(11–6)}$$

7. Especifique el factor de diseño, N.
8. Calcule la carga permisible, P_a,

$$P_a = \frac{P_{cr}}{N}$$

Problema de ejemplo 11–1

Se tiene que utilizar en una máquina un miembro circular de acero AISI 1020 estirado en frío con ambos extremos de pasador. Su diámetro es de 25 mm y su longitud de 950 mm. ¿Qué carga máxima puede soportar el miembro antes de pandearse? También calcule la carga permisible en la columna con un factor de diseño de $N = 3$.

Solución

Objetivo: Calcular la carga de pandeo crítica para la columna y carga permisible con un factor de diseño de $N = 3$.

Datos: $L = 950$ mm. La sección transversal es circular, $D = 25$ mm. Extremos de pasador.
La columna es de acero: AISI 1020 estirado en frío.
En el apéndice A–14: $s_Y = 441$ MPa; $E = 207$ GPa $= 207 \times 10^9$ N/m^2

Análisis: Use el *Método de analizar columnas*.

Resultados: ***Paso 1.*** Determine el factor de fijación de los extremos. Para la columna con extremos de pasador, $K = 1.0$.

Paso 2. Calcule la longitud efectiva.

$$L_e = KL = 1.0((L) = 950 \text{ mm}$$

Paso 3. Calcule el valor mínimo del radio de giro. En el apéndice A–1, para cualquier eje de una sección circular, $r = D/4$. Entonces,

$$r = \frac{D}{4} = \frac{25 \text{ mm}}{4} = 6.25 \text{ mm}$$

Paso 4. Calcule la relación de esbeltez, $SR = L_e/r$.

$$SR = \frac{L_e}{r} = \frac{950 \text{ mm}}{6.25 \text{ mm}} = 152$$

Paso 5. Calcule la constante de columna, C_c.

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{s_y}} = \sqrt{\frac{2\pi^2(207 \times 10^9 \text{ N/m}^2)}{441 \times 10^6 \text{ N/m}^2}} = 96.3$$

Paso 6. Compare C_c con SR y decida si la columna es larga o corta. Luego utilice la formula apropiada para calcular la carga de pandeo crítica. Como SR es mayor que C_c, se aplica la fórmula de Euler.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EA}{(SR)^2}$$

El área es

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi(25 \text{ mm})2}{4} = 491 \text{ mm}^2$$

Entonces

$$P_{cr} = \frac{\pi^2(207 \times 10^9 \text{ N/m}^2)(491 \text{ mm}^2)}{(152)^2} \times \frac{1 \text{ m}^2}{(10^3 \text{ mm})^2} = 43.4 \text{ kN}$$

Paso 7. Se especifica un factor de diseño de $N = 3$.

Paso 8. La carga permisible, P_a es

$$P_a = \frac{P_{cr}}{N} = \frac{43.4 \text{ kN}}{3} = 14.5 \text{ kN}$$

Problema de ejemplo 11–2

Determine la carga crítica en una columna de acero de sección transversal cuadrada de 12 mm por lado y 300 mm de longitud. La columna es de acero AISI 1040, laminado en caliente. Uno de sus extremos se soldará rígidamente a un apoyo firme y el otro se conectará por medio de una junta de pasador. También calcule la carga permisible en la columna con un factor de diseño de $N = 3$.

Solución

Objetivo Calcular la carga de pandeo crítica para la columna y la carga permisible con un factor de diseño de $N = 3$.

Datos $L = 300$ mm. La sección transversal es cuadrada; cada lado es $b = 12$ mm.
Un extremo de pasador; un extremo fijo. La columna es de acero; AISI 1040 laminado en caliente.
En el apéndice A–14: $s_Y = 414$ MPa; $E = 207$ GPa $= 207 \times 10^9$ N/m^2

Análisis Use el *Método de analizar columnas*.

Resultados ***Paso 1.*** Determine el factor de fijación de los extremos. Para la columna con un extremo pasador y otro fijo, $K = 0.80$ es un valor práctico (figura 11–3).

Paso 2. Calcule la longitud efectiva.

$$L_e = KL = 0.80(L) = 0.80(300\ \text{mm}) = 240\ \text{mm}$$

Paso 3. Calcule el valor mínimo del radio de giro. En el apéndice A–1, para una sección transversal cuadrada, $r = b/\sqrt{12}$. Entonces,

$$r = \frac{b}{\sqrt{12}} = \frac{12\ \text{mm}}{\sqrt{12}} = 3.46\ \text{mm}$$

Paso 4. Calcule la relación de esbeltez, $SR = L_e/r$.

$$SR = \frac{L_e}{r} = \frac{KL}{r} = \frac{(0.8)\ (300\ \text{mm})}{3.46\ \text{mm}} = 69.4$$

Paso 5. Normalmente se calcularía el valor de la constante de columna, C_c. Pero, en este caso, utilizamos la figura 11–5. Para un acero con resistencia a la cedencia de 414 MPa, C_c = 96, aproximadamente.

Paso 6. Compare C_c con SR y decida si la columna es larga o corta. Luego utilice la fórmula apropiada para calcular la carga de pandeo crítica. Como SR es menor que C_c, se utilizará la fórmula de Johnson (ecuación 11–6).

$$P_{cr} = As_y\left[1 - \frac{s_y(SR)^2}{4\pi^2E}\right]$$

El área de la sección cuadrada es

$$A = b^2 = (12\ \text{mm})^2 = 144\ \text{mm}^2$$

Entonces,

$$P_{cr} = (144\ \text{mm}^2)\left(\frac{414\ \text{N}}{\text{mm}^2}\right)\left[1 - \frac{(414 \times 10^6\ \text{N/m}^2)\ (69.4)^2}{4\pi^2(207 \times 10^9\ \text{N/m}^2)}\right]$$

$$P_{cr} = 45.1\ \text{kN}$$

Paso 7. Se especifica un factor de diseño de $N = 3$.

Paso 8. La carga permisible, P_a es

$$P_a = \frac{P_{cr}}{N} = \frac{45.1\ \text{kN}}{3} = 15.0\ \text{kN}$$

Problema de ejemplo 11–3

Recurra a los resultados del problema de ejemplo 11–1 donde se analizó una columna de acero de 25 mm de diámetro y 950 mm de longitud para determinar la carga de pandeo crítica. La columna era de acero AISI 1020 estirado en frío. Se encontró que P_{cr} = 43.4 kN. Ahora rediseñe la estructura de la cual forma parte esta columna. Se decidió utilizar arriostramiento lateral en todas las direcciones a la mitad de la columna. Determine la carga de pandeo crítica para la columna rediseñada.

Solución

Objetivo Calcular la carga de pandeo crítica para la columna arriostrada.

Datos Los datos del problema de ejemplo 11–1. Sección transversal circular, D = 25 mm, L = 950 mm. Extremos de pasador. Acero AISI 1020 estirado en frío; E = 207 GPa, s_Y = 441 MPa. Columna arriostrada a 450 mm de cada extremo.

Análisis Use el *Método de analizar columnas.*

Resultados

Paso 1. Factor de fijación de los extremos, $K = 1.0$ con extremos de pasador.

Paso 2. Longitud efectiva. La longitud no arriostrada ahora es de 450 mm. Entonces $L_e = KL = 1.0(450\ \text{mm}) = 450\ \text{mm}$

Paso 3. Radio de giro $= r = 6.25$ ([del Problema de ejemplo 11–1]

Paso 4. Relación de esbeltez $= SR = L_e/R = (450\ \text{mm})/(6.25\ \text{mm}) = 72$

Paso 5. Constante de columna $= C_c = 96.2$ [del Problema de ejemplo 11–1]

Paso 6. Como $SR < C_c$, use la fórmula de Johnson. $A = 491\ \text{mm}^2$

$$P_{cr} = As_y\left[1 - \frac{s_y(SR)^2}{4\pi^2 E}\right]$$

$$P_{cr} = (491\ \text{mm}^2)\left(\frac{441\ \text{N}}{\text{mm}^2}\right)\left[1 - \frac{(441 \times 10^6\ \text{N/m}^2)(72)^2}{4\pi^2(207 \times 10^9\ \text{N/m}^2)}\right] = 156\ \text{kN}$$

Comentario

La carga de pandeo crítica se incrementó de 43.4 kN a 156 kN, más de 3½ veces. Ésa es una mejora significativa. La columna se comporta como si fuera de la mitad de larga.

11–9 HOJA DE CÁLCULO PARA ANALIZAR COLUMNAS

Completar el proceso descrito en la sección 11–8 con una calculadora, lápiz y papel es tedioso. Una hoja de cálculo automatiza los cálculos después de que ha ingresado los datos pertinentes para la columna particular que se va a analizar. La figura 11–9 muestra los resultados de salida de una hoja de cálculo utilizada para resolver el problema 11–1. La elaboración de la hoja de cálculo podría hacerse de muchas maneras y se le pide desarrollar su propio estilo. Los siguientes comentarios describen las características de la hoja de cálculo dada.

1. En la parte superior de hoja, se dan instrucciones para el usuario sobre cómo ingresar los datos y unidades. Esta hoja es sólo para unidades métricas SI. Se utilizaría una hoja diferente si se utilizaran unidades del sistema inglés.

2. En el lado izquierdo de la hoja aparecen los diversos datos que deben ser provistos por el usuario para ejecutar los cálculos. A la derecha se dan los valores de salida. Las fórmulas para calcular L_e, C_c, KL/r y la carga permisible se escriben directamente en la celda donde aparecen los valores calculados. Los resultados correspondientes al mensaje de salida "Column is: *larga*" y la carga de pandeo crítica son producidos por *funciones* establecidas en *macros* escritas en Visual Basic y colocadas en una hoja aparte de la hoja de cálculo. La figura 11–10 muestra las dos macros utilizadas.La primera (*LorS*) realiza el proceso de decisión para probar si la columna es larga o corta comparando la relación de esbeltez con la constante de columna. La segunda (*Pcr*) calcula la carga de pandeo crítica por medio de la fórmula de Euler o la fórmula de J. B. Johnson según el resultado de la macro *LorS*. Estas funciones son invocadas por instrucciones en las celdas donde se localizan "larga" y el valor calculado de la carga de pandeo crítica (43.42 kN).

3. Con una hoja de cálculo como ésa usted puede analizar varias opciones de diseño. Por ejemplo, el enunciado del problema dado indicaba que los extremos eran de pasador y el resultado fue un valor de fijación de los extremos de $K = 1$. ¿Qué pasaría si ambos extremos fueran fijos? Simplemente con cambiar el valor de dicha celda a $K = 0.65$ toda la hoja sería recalculada y el valor revisado de la carga de pandeo crítica estaría disponible casi al instante. El resultado es que $P_{cr} = 102.76$ kN, un incremento de

FIGURA 11–9
Hoja de cálculo para el análisis de columnas con datos del Problema de ejemplo 11-1 [datos SI].

PROGRAMNA DE ANÁLISIS DE COLUMNAS	*Datos del:* Problema de ejemplo 11-1
Consulte en la sección 11-8 el procedimiento de análisis	
Ingrese los valores de las variables en *cursivas* en los cuadros de texto sombreados	Use unidades métricas SI compatibles.
Valores a ser ingresados:	**Valores calculados:**
Longitud y fijación de los extremos: *Longitud de la columna, L = 950 mm* *Fijación de los extremos, K = 1.00*	Ec. de longitud, L_e = KL = 950.0 mm
Propiedades del material: *Resistencia a la cedencia, s_y = 441 Mpa* *Módulo de elasticidad, E = 207 GPa*	Constante de columna, C_c = 96.3
Propiedades de la sección transversal: [Nota: Ingrese *r* o calcule *r* = sqrt(*I*/*A*)] [Siempre ingrese el área] [Ingrese cero para *I* o *r* si no se utiliza] *Area A, = 491 mm²* *Momento de inercia, I = 0 mm⁴* **o** *Radio de giro, r = 6.25 mm*	Relación de esbeltez, *KL/r* = 152.0
	La columna es: larga
	Carga de pandeo crítica = ***43.42 kN***
Factor de diseño *Factor de diseño con la carga, N = 3*	**Carga permisible =** ***14.47 kN***

FIGURA 11–10
Macros utilizadas en la hoja de cálculo de análisis de columnas.

```
'Macro LorS
'Determinar si la columna es larga o corta.
Function LorS(SR, CC)
   If SR>CC Then
      LorS= "larga"
   Else
      LorS= "corta"
   End If
End Function

'Macro de carga crítica
'Utilice la fórmula de Euler para columnas largas.
'Utilice la fórmula de Johnson para columnas cortas.
Function Pcr(LorS, SR, E, A, Sy)
Const Pi = 3.1415926
   If LorS = "long" Then
      Pcr= Pi ^ 2 * E * A / SR ^ 2
      'Euler Equation; Eq. (11-4)
   Else
      Pcr = A * Sy(1-(Sy * SR ^ 2 / (4* Pi ^ 2 * E))
      'Ecuación de Johnson; Eq. (11-7)
   End If
End Function
```

2.37 veces el valor original. Con esa clase de mejora, usted, el diseñador, podría verse tentado a cambiar el diseño para producir extremos fijos.

11–10 PERFILES EFICIENTES PARA SECCIONES TRANSVERSALES DE COLUMNAS

Cuando se diseña una columna para que soporte una carga especificada, el diseñador tiene la responsabilidad de seleccionar el perfil general de su sección transversal y determinar entonces las dimensiones requeridas. Los principios siguientes pueden ayudar en la selección inicial del perfil.

Un perfil eficiente es uno que utiliza una pequeña cantidad de material para realizar una función dada. Para columnas, el objetivo es incrementar al máximo el radio de giro para reducir la relación de esbeltez. Observe también que como $r = \sqrt{I/A}$, el incremento al máximo del momento de inercia de un área dada tiene el mismo efecto.

Cuando se analizó en el momento de inercia en los capítulos 6 y 7, se observó que es deseable colocar tanta área de la sección transversal tan lejos del centroide como sea posible. Para vigas (analizadas en el capítulo 7) por lo general hubo sólo un eje importante, el eje con respecto al cual ocurría la flexión. En columnas, el pandeo, en general, puede ocurrir en cualquier dirección. Por consiguiente, es deseable disponer de propiedades uniformes con respecto a cualquier eje. La sección circular hueca, comúnmente llamado tubo, es entonces un perfil muy eficiente para usarse como columna. Le sigue de cerca el tubo cuadrado hueco. También se pueden utilizar secciones compuestas de secciones estructurales estándar, como se muestra en la figura 11–11.

Las columnas de edificios a menudo se arman con perfiles especiales de patín ancho llamados *secciones para columna*. Son relativamente anchos y gruesos en comparación con los perfiles seleccionados, por lo general, para vigas. Esto hace que el momento de inercia con respecto al eje Y–Y sea casi igual a aquel con respecto al eje X–X. EL resultado es que los radios de giro con respecto a los dos ejes también son casi iguales. La figura 11–12 muestra una comparación de perfiles de patín ancho de 12 in: una sección de columna y un perfil de viga típico. Observe que se deberá utilizar el radio de giro menor para calcular la relación de esbeltez.

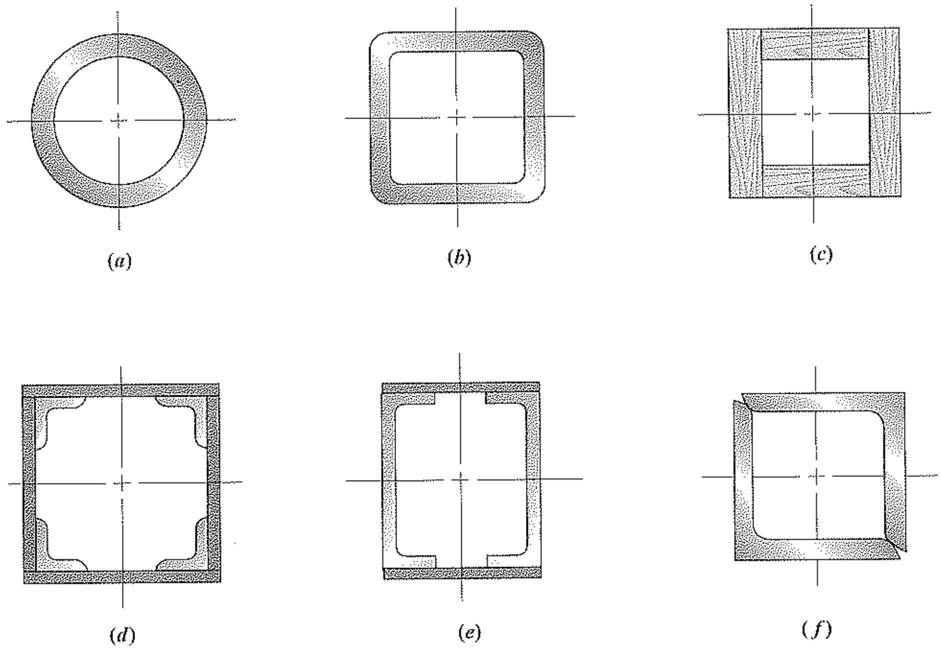
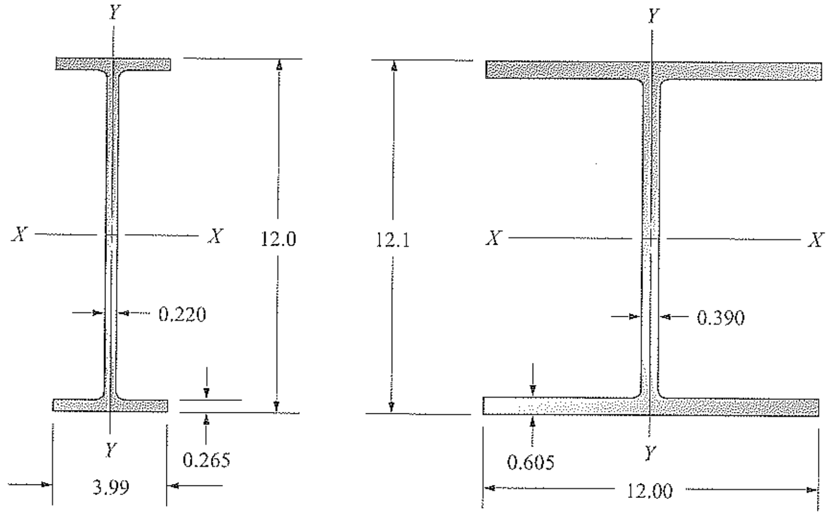


FIGURA 11–11 Ejemplos de perfiles de columna eficientes. (a) Sección circular hueca, tubo. (b) Tubo cuadrado hueco. (c) Sección de caja formada con vigas de madera. (d) Ángulos de patas iguales con placas. (e) Canales de aluminio con placas. (f) Dos ángulos de patas iguales.

FIGURA 11–12
Comparación de un perfil de viga de patín ancho con una sección de columna.



(a) Perfil de viga W12 × 16
Área = 4.71 in^2
I_x = 103 in^4
I_y = 2.82 in^4
r_x = 4.68 in
r_y = 0.77 in
r_x/r_y = 6.08

(b) Sección de columna W12 × 65
Área = 19.1 in^2
I_x = 533 in^4
I_y = 174 in^4
r_x = 5.28 in
r_y = 3.02 in
r_x/r_y = 1.75
r_y casi igual a r_y

11–11 ESPECIFICACIONES DEL AISC

Las columnas son elementos esenciales de muchas estructuras. El diseño y análisis de columnas en aplicaciones de construcción están regidos por las especificaciones del AISC, el American Institute of Steel Construction (referencia 2), brevemente resumidas aquí para secciones de columna cargadas a través de sus ejes centroidales y que no presentan pandeo local de sus patines esbeltos alargados. El método implica las siguientes variables. Observe que los símbolos utilizados aquí son similares a los utilizados en secciones anteriores de este capítulo y no necesariamente son las mismas del manual AISC.

$$\textit{Relación de esbeltez de transición} = SR_t = 4.71\sqrt{E/s_y} \qquad \textbf{(11–8)}$$

(SR_t = es aproximadamente 6% mayor que C_c)

$$\textit{Esfuerzo de pandeo crítico elástico} = s_e = \pi^2 E/(SR)^2 \qquad \textbf{(11–9)}$$

(en ocasiones llamado *esfuerzo de Euler*)

Esfuerzo de pandeo flexionante = s_{cr} cuyo valor depende de la SR

Si $SR \leq SR_t$, entonces la columna es corta y

$$s_{cr} = [0.658^d]\, s_y \qquad \text{y el exponente } d = s_y/s_e \qquad \textbf{(11–10)}$$

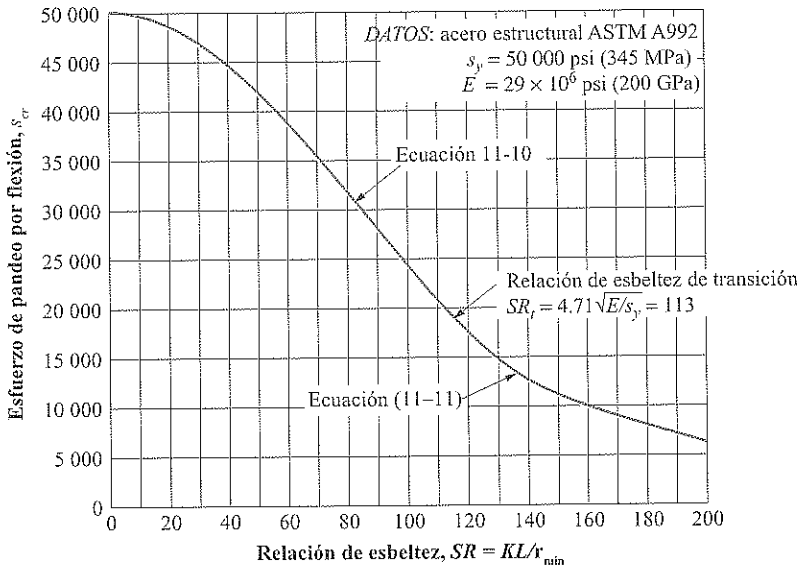


FIGURA 11–13 Esfuerzo de pandeo por flexión contra relación de esbeltez – método AISC.

Si $SR > SR_t$, entonces la columna es larga y,

$$s_{cr} = 0.877\, s_e \qquad \textbf{(11–11)}$$

Entonces la *resistencia al pandeo nominal* $= P_a = s_{cr}A_g$ **(11–12)**

(A_g es el área bruta de la columna)

Por último, la *resistencia a la compresión permisible* $= P_a = P_n/1.67$ **(11–13)**

Es de hacerse notar que estas fórmulas son más simples y un poco diferentes de las reportadas en ediciones previas del manual AISC. Sin embargo, los valores resultantes de P_a se encuentran dentro de aproximadamente el 2% de los resultados previos.

La figura 11–13 muestra una gráfica del *esfuerzo de pandeo flexionante*, s_{cr} contra la relación de esbeltez real de una columna. Los datos son para acero estructural ASTM A992, el acero más común para vigas W y secciones de columna. Observe que las ecuaciones (11–10) y (11–11) son tangentes en el punto correspondiente al valor de la relación de esbeltez de transición y que el esfuerzo de pandeo tiende a la resistencia a la cedencia en el caso de columnas muy cortas. El AISC recomienda que la relación de esbeltez utilizable máxima sea de 200.

Problema de ejemplo 11–4 Calcule la resistencia a la compresión permisible, P_a para una columna hecha de tubería estructural rectangular de acero, HSS102 × 51 × 6.4. El material es acero estructural ASTM A500, grado B. La longitud de la columna es de 3050 mm y sus extremos son articulados.

Solución Utilizaremos la ecuaciones (11–8) a (11–13) con E = 200 GPa = 200 000 MPa y s_y = 290 MPa. Se espera que el tubo se pandee con respecto al eje Y–Y de modo que $r_{\min} = r_y$ = 19.8 mm [(apéndice A–9(SI)] y A_g = 1570 mm².

Relación de esbeltez real: $SR = KL/r = 1.00(3050\text{ mm}/19.8\text{ mm}) = 154$

Relación de esbeltez de transición $= SR_t = 4.71\sqrt{E/S_y} = 4.71\sqrt{(200\,000/290)} = 123.7$

Esfuerzo de pandeo crítico elástico = $s_e = \pi^2 E/(SR)^2 = \pi^2\,(200\,000\text{ MPa})/(154)^2$

$s_e = 83.23$ MPa

Como $SR > SR_t$, la columna es larga y utilizamos la ecuación (11–11):

$$s_{cr} = 0.877 s_e = 0.877(83.23\text{ MPa}) = 73.0\text{ MPa}$$

Ahora, si utilizamos la ecuación (11–12),
la *resistencia nominal al pandeo* = $P_n = s_{cr}A_g = (73.0\text{ N/mm}^2)(1570\text{ mm}^2) = 114.6$ kN

Con la ecuación (11–13),
la *resistencia a la compresión permisible* = $P_a = P_n/1.67 = 114.6\text{ kN}/1.67 = 68.6$ kN

Problema de ejemplo 11–5 Calcule la resistencia a la compresión permisible, P_a, para la columna descrita en el problema de ejemplo 11–4 excepto que se instalará con ambos extremos fijos en lugar de articulados.

Solución Calcular el peso de una masa de concreto.

Relación de esbeltez real = $SR = KL/r = (0.65)(3050\text{ mm}/19.8\text{ mm}) = 100$
Del Problema de ejemplo 11–4, *relación de esbeltez de transición* = $SR_t = 123.7$
Esfuerzo de pandeo crítico elástico = $s_e = \pi^2 E/(SR)^2 = \pi^2(200\,000\text{ MPa})/(100)^2$

$$s_e = 197.4\text{ Mpa}$$

Entonces la columna es corta y la ecuación (11–10) se aplica a continuación.
El exponente $d = s_y/s_e = 290\text{ MPa}/197.4\text{ MPa} = 1.469$ y

$$s_{cr} = [0.658^d]\,s_y = [0.658^{1.469}](290\text{ MPa}) = 156.8\text{ MPa}$$

La *resistencia al pandeo nominal* = $P_n = s_{cr}A_g = (156.8\text{ N/mm}^2)(1570\text{ mm}^2 = 246.2$ kN
Con la ecuación (11–13),
la *resistencia a la compresión permisible* = $P_a = P_n/1.67 = 246.2\text{ kN}/1.67 = 147.4$ kN

Comentario La resistencia a la compresión permisible resultante para la columnas con extremos fijos es 2.15 veces mayor que el diseño de columna con extremos de pasador.

11–12 ESPECIFICACIONES DE LA ALUMINUM ASSOCIATION

La publicación de la Aluminum Association, *Aluminum Design Manual* (vea la referencia 1), define esfuerzos permisibles para columnas para cada una de varias aleaciones y sus tratamientos térmicos. Se dan tres ecuaciones diferentes para columnas cortas, intermedias y largas definidas con respecto a límites de esbeltez. Las ecuaciones son de la forma

$$\frac{P_a}{A} = \frac{s_y}{FS} \quad \text{(columnas cortas)} \qquad \textbf{(11–11)}$$

$$\frac{P_a}{A} = \frac{B_c - D_c(L_e/r)}{FS} \quad \text{(columnas intermedias)} \qquad \textbf{(11–11)}$$

$$\frac{P_a}{A} = \frac{\pi^2 E}{FS(L_e/r)^2} \quad \text{(columnas largas)} \qquad \textbf{(11–11)}$$

En los tres casos, se recomienda $FS = 1.95$ para edificios y estructuras similares. El análisis de columnas cortas asume que no se pandearan y que la seguridad depende de la resistencia a la cedencia del material. La ecuación (11–16) para columnas largas es la fórmula de Euler con un factor de seguridad aplicado. La fórmula para columnas intermedias [ecuación (11–15)] depende de las constantes de pandeo B_c y D_c, las cuales son funciones de la resistencia a la cedencia de la aleación de aluminio y del módulo de elasticidad. La división entre columnas largas e intermedias es similar a la constante C_c previamente utilizada en este capítulo.

Las siguientes son ecuaciones específicas para la aleación 6061–T6 utilizada en estructuras de edificios en las formas de lámina, placa, extrusiones, perfiles estructurales, varilla, barras, tubería y tubos.

Columnas cortas y columnas intermedias: $0 < L_e/r < 66$

$$\frac{P_a}{A} = \left(20.2 - 0.126\frac{L_e}{r}\right)\text{ksi} \quad \textbf{(11–17a)}$$

$$\frac{P_a}{A} = \left(139 - 0.869\frac{L_e}{r}\right)\text{MPa} \quad \textbf{(11–17b)}$$

Columnas largas: $L_e/r > 66$

$$\frac{P_a}{A} = \frac{51\,000}{(L_e/r)^2}\text{ksi} \quad \textbf{(11–18a)}$$

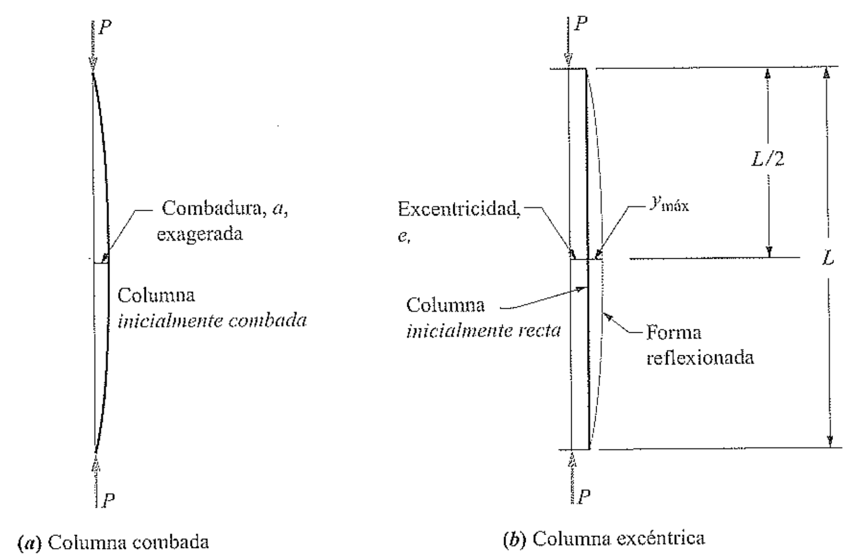
$$\frac{P_a}{A} = \frac{352\,000}{(L_e/r)^2}\text{MPa} \quad \textbf{(11–18b)}$$

Consulte la referencia 1 por lo que se refiere a esfuerzos de diseño para otras aleaciones de aluminio.

11–13 COLUMNAS CON CARGAS NO CENTRADAS

Todos los métodos de análisis estudiados hasta ahora en este capítulo se han limitado a cargas de compresión que actúan alineadas con el eje centroidal de la sección transversal de la columna. También, se supuso que el eje de la columna está perfectamente recto antes de la aplicación de las cargas. Utilizamos el término *columna centralmente cargada recta* para describir un caso como ése.

FIGURA 11–14 Ilustración de columnas combadas y excéntricas.



Muchas columnas reales violan estas suposiciones hasta cierto grado. La figura 11–14 muestra dos condiciones como ésas. Si una columna inicialmente está *arqueada*, la fuerza de compresión aplicada en la columna tiende a flexionarla además de pandearla y la falla ocurre con una carga menor que la pronosticada por la ecuación utilizada hasta ahora en este capítulo. Una *columna excéntricamente cargada* es una en la que existe una desviación premeditada de la línea de acción de la carga de compresión con respecto a su eje centroidal. En este caso, de nuevo existe un cierto esfuerzo de flexión además del esfuerzo de compresión axial que tiende a provocar pandeo.

Columnas combadas. La fórmula para columnas combadas permite una combadura inicial, a, que se tiene que considerar (consulte las referencias 4, 5 y 6):

Fórmula para columnas combadas

$$P_a^2 - \frac{1}{N}\left[s_y A + \left(1 + \frac{ac}{r^2}\right)P_{cr}\right]P_a + \frac{s_y A P_{cr}}{N^2} = 0 \qquad \textbf{(11–19)}$$

donde c = distancia del eje neutro de la sección transversal con respecto al cual ocurre la flexión a su borde externo

P_{cr} se define como la carga crítica calculada con la *fórmula de Euler*.

Aun cuando esta fórmula puede volverse cada vez más imprecisa para columnas cortas, no es apropiado cambiar a la fórmula de Johnson como lo es para columnas rectas.

La fórmula para columnas combadas es cuadrática con respecto a la carga permisible P_a. La evaluación de todos los términos constantes de la ecuación (11–19) produce una ecuación de la forma

$$P_a^2 + C_1 P_a + C_2 = 0$$

Entonces, la solución de la ecuación cuadrática es

$$P_a = 0.5\left[-C_1 - \sqrt{C_1^2 - 4C_2}\right]$$

Se selecciona la menor de las dos soluciones posibles.

Problema de ejemplo 11–6 Una columna de 32 in de longitud tiene ambos extremos de pasador. Su sección transversal es circular de 0.75 in de diámetro y su combadura inicial es de 0.125 in. El material es acero AISI 1040 laminado en caliente. Calcule la carga permisible para un factor de diseño de 3.

Solución

Objetivo: Especificar la carga permisible para la columna.

Datos: Sección transversal sólida: $D = 0.75$ in; $L = 32$ in; use $N = 3$.
Ambos extremos son de pasador. Combadura inicial $= a = 0.125$ in.
Material: acero AISI 1040 laminado en caliente.

Análisis: Use la ecuación (11–19). Evalúe primero C_1 y C_2. Luego resuelva la ecuación cuadrática para P_a.

Resultados:

$$s_y = 60\,000 \text{ psi}$$
$$A = \pi D^2/4 = (\pi)(0.75)^2/4 = 0.442 \text{ in}^2$$
$$r = D/4 = 0.75/4 = 0.188 \text{ in}$$

$$c = D/2 = 0.75/2 = 0.375 \text{ in}$$

$$KL/r = [(1.0)(32)]/0.188 = 171$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EA}{(KL/r)^2} = \frac{\pi^2(30\,000\,000)(0.442)}{(171)^2} = 4476 \text{ lb}$$

$$C_1 = \frac{-1}{N}\left[s_y A + \left(1 + \frac{ac}{r^2}\right)P_{cr}\right] = -12\,311$$

$$C_2 = \frac{s_y A P_{cr}}{N^2} = 1.319 \times 10^7$$

La ecuación cuadrática es, por consiguiente,

$$P_a^2 - 12\,311 P_a + 1.319 \times 10^7 = 0$$

Comentario Con ésta, $P_a = 1186$ lb es la carga permisible.

La figura 11–15 muestra la solución del problema de ejemplo 11–6 con una hoja de cálculo. Si bien su apariencia es similar a la de la hoja de cálculo de análisis de columna anterior, los detalles van después de los cálculos necesarios para resolver la ecuación (11–19). Abajo a la izquierda, se requieren dos valores especiales: (1) la combadura a y (2) la distancia c del eje neutro a la cara externa de la sección transversal. A la mitad de la parte del lado derecho se dan algunos valores intermedios utilizados en la ecuación (11–19): C_1 y C_2 tal como se definieron en la solución del problema de ejemplo 11–6. El resultado, la carga permisible, P_a, aparece abajo a la derecha de la hoja de cálculo. Arriba de ella, para propósitos de comparación, se da el valor calculado de la carga de pandeo crítica para una columna recta del mismo

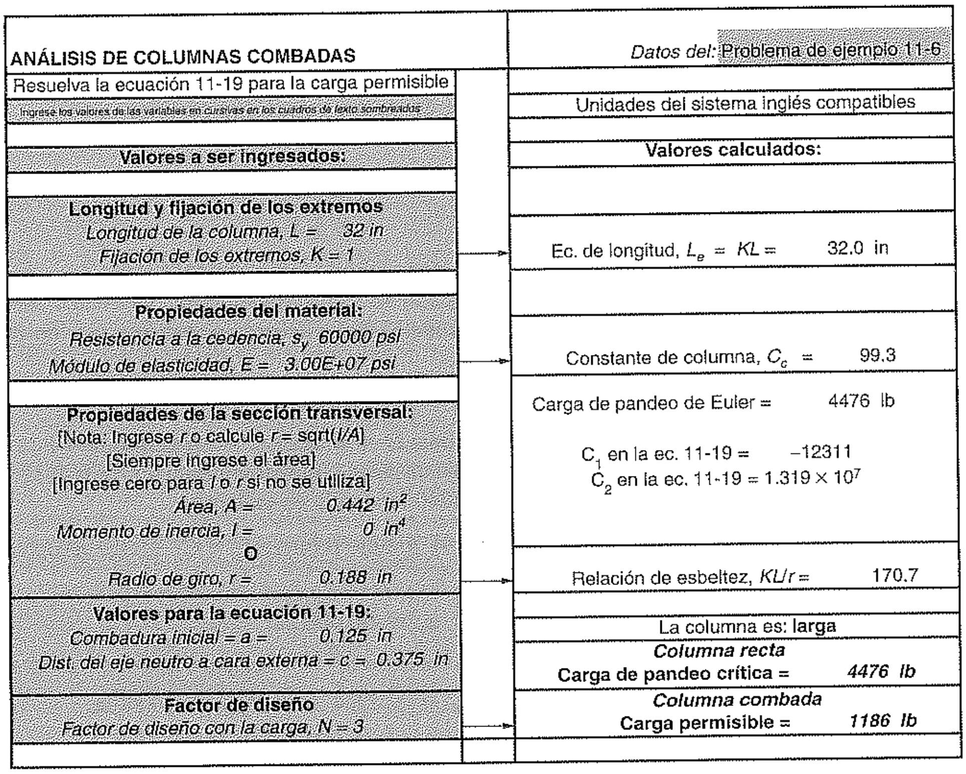


FIGURA 11–15 Hoja de cálculo para el análisis de columnas combadas – unidades del sistema inglés.

diseño. Observe que este procedimiento de solución es más preciso para columnas largas. Si el análisis indica que la columna es *corta* y no *larga*, el diseñador deberá tomar nota de cuán corta es comparando la relación de esbeltez, KL/r, con la constante de columna, C_c. Si la columna es bastante corta, el diseñador no deberá confiar en la precisión del resultado obtenido con la ecuación (11–19).

Columnas excéntricamente cargadas. Una carga *excéntrica* es una que se aplica lejos del eje centroidal de la sección transversal de la columna, como se muestra en la figura 11–14(b). Tal carga produce flexión, además de acción de columna, que produce la forma reflexionada mostrada en la figura. El esfuerzo máximo en la columna reflexionada ocurre en las fibras más externas de la sección transversal, a la mitad de la columna, donde ocurre la deflexión máxima, $y_{máx}$. Denotemos el esfuerzo en este punto como $\sigma_{L/2}$. Entonces, con cualquier carga aplicada, P,

Fórmula de la secante para columnas excéntricamente cargadas

$$\sigma_{L/2} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{KL}{2r}\sqrt{\frac{P}{AE}}\right)\right] \quad \textbf{(11–20)}$$

(consulte la referencia 6). Observe que este esfuerzo *no es* directamente proporcional a la carga. Cuando evalúe la secante en esta fórmula, observe que su argumento entre paréntesis está en *radianes*. También, como la mayoría de las calculadoras no cuentan con la función secante, recuerde que ésta es igual a 1/coseno.

Para propósitos de diseño, nos gustaría especificar un factor de diseño N, que se pueda aplicar a la *carga de falla* similar a la definida para columnas rectas centralmente cargadas. Sin embargo, en este caso, se pronostica que la falla ocurre cuando el esfuerzo máximo en la columna excede la resistencia a la cedencia del material. Definamos ahora un nuevo término, P_y, la carga aplicada a la columna excéntricamente cargada cuando el esfuerzo máximo es igual a la resistencia a la cedencia. La ecuación (11–20) se vuelve entonces

$$s_y = \frac{P_y}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{KL}{2r}\sqrt{\frac{P_y}{AE}}\right)\right]$$

Ahora, si definimos la *carga permisible* como

$$P_a = P_y/N$$

o

Ecuación de diseño de columnas excéntricamente cargadas

$$P_y = NP_a$$

esta ecuación se transforma en

$$\text{Requerida} \quad s_y = \frac{NP_a}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{KL}{2r}\sqrt{\frac{NP_a}{AE}}\right)\right] \quad \textbf{(11–21)}$$

Flexión máxima en una columna excéntricamente cargada

Esta ecuación no puede resolverse para N o P_a. Por consiguiente, se requiere una solución iterativa, como se verá en el problema de ejemplo 11–7.

Otro factor crítico puede ser la cantidad de flexión del eje de la columna a causa de la carga excéntrica:

$$y_{máx} = e\left[\sec\left(\frac{KL}{R}\sqrt{\frac{P}{AE}}\right) - 1\right] \quad \textbf{(11–22)}$$

Observe que el argumento de la secante es el mismo que se utilizó en la ecuación (11–20).

Problema de ejemplo 11–7 Para la columna del Problema de ejemplo 11–6, calcule el esfuerzo y flexión máximos si se aplica una carga de 1075 lb con una excentricidad de 0.75 in.

Solución

Objetivo Calcular el esfuerzo y la flexión para la columna excéntricamente cargada.

Datos Los datos del problema de ejemplo 11–6, pero con excentricidad = e = 0.75 in.
Sección transversal circular sólida: D = 0.75 in; L = 32 in.
Ambos extremos son de pasador: KL = 32 in; r = 0.188 in; $c = D/2$ = 0.375 in.
Material: acero AISI 1040 laminado en caliente; $E = 30 \times 10^6$ psi, s_y = 60 000 psi

Análisis Use la ecuación (11–20) para calcular el esfuerzo máximo. En seguida utilice la ecuación (11–22) para calcular la flexión máxima.

Resultados Todos los términos se evaluaron con anterioridad. Entonces el esfuerzo máximo se calcula con la ecuación (11–20):

$$\sigma_{L/2} = \frac{1075}{0.422}\left[1 + \frac{(0.75)(0.375)}{(0.188)^2}\sec\left(\frac{32}{2(0.188)}\sqrt{\frac{1075}{(0.422)(30 \times 10^6)}}\right)\right]$$

$$\sigma_{L/2} = 29\,300 \text{ psi}$$

La flexión máxima se calcula con la ecuación (11–22):

$$y_{\text{máx}} = 0.75\left[\sec\left(\frac{32}{2(0.188)}\sqrt{\frac{1075}{(0.442)(30 \times 10^6)}}\right) - 1\right] = 0.293 \text{ in}$$

Comentario El esfuerzo máximo es de 29 300 psi a la mitad de la columna. La flexión allí es de 0.293 in.

Problema de ejemplo 11–8 El esfuerzo en la columna calculado en el problema de ejemplo 11–7 parece elevado para el acero AISI 1040 laminado en caliente. Rediseñe la columna para lograr un factor de diseño de por lo menos 3. Use sólo los tamaños preferidos dados en el apéndice A–2.

Solución

Objetivo Rediseñar la columna excéntricamente cargada del problema de ejemplo 11–7 para reducir el esfuerzo y lograr un factor de diseño de por lo menos 3.

Datos Datos de los problemas de ejemplo 11–6 y 11–7.

Análisis Use un diámetro mayor. Use la ecuación (11–21) para calcular la resistencia requerida. Luego compárela con la resistencia del acero AISI 1040 laminado en caliente. Itere hasta que el esfuerzo sea satisfactorio.

Resultados El apéndice 3 da el valor de la resistencia a la cedencia del acero AISI 1040 laminado en caliente como 60 000 psi. Si decidimos conservar el mismo material, deberemos incrementar las dimensiones de la sección transversal de la columna para reducir el esfuerzo. Se puede utilizar la ecuación (11–21) para evaluar una alternativa de diseño.

El objetivo es determinar valores adecuados de A, c y r para la sección transversal de modo que P_a = 1075 lb; N = 3; L_e 0 32 in; e = 0.75 in; y el valor de todo el lado derecho la ecuación es menor que 60 000 psi. El diseño original tenía una sección transversal circular de 0.75 in de diámetro. Tratemos de incrementar el diámetro a D = 1.00 in. Entonces

$$A = \pi D^2/4 = \pi(1.00 \text{ in})^2/4 = 0.785 \text{ in}^2$$
$$r = D/4 = (1.00 \text{ in})/4 = 0.250 \text{ in}$$
$$r^2 = (0.250 \text{ in})^2 = 0.0625 \text{ in}^2$$
$$c = D/2 = (1.00 \text{ in})/2 = 0.50 \text{ in}$$

Ahora llamemos S'_y al lado derecho de la ecuación (11–21). Entonces

$$s'_y = \frac{3(1075)}{0.785}\left[1 + \frac{(0.75)(0.50)}{(0.0625)}\sec\left(\frac{32}{2(0.250)}\sqrt{\frac{(3)(1075)}{(0.785)(30 \times 10^6)}}\right)\right]$$

$$s'_y = 37\,740 \text{ psi} = \text{valor requerido de } s_y$$

Este valor es mucho menor que el valor de $s_Y = 60\,000$ psi para el acero dado y da el factor de diseño de 3.0 o mayor. Si probamos el único tamaño preferido menor del apéndice A–2 (7/8 in = 0.875 in), el s_y requerido es de 65 825 psi, y es un valor demasiado elevado. Por consiguiente, especifique $D = 1.00$ in.

Ahora podemos evaluar la flexión máxima esperada con el nuevo diseño con la ecuación (11–22):

$$y_{\text{máx}} = 0.75\left[\sec\left(\frac{32}{2(0.250)}\sqrt{\frac{1075}{(0.785(30 \times 10^6)}}\right) - 1\right]$$

$$y_{\text{máx}} = 0.076 \text{ in}$$

Comentario El diámetro de 1.00 in es satisfactorio. La flexión máxima de la columna es de 0.076 in.

La figura 11–16 muestra la solución del problema de la columna excéntrica del problema de ejemplo 11–8 con una hoja de cálculo para evaluar las ecuaciones (11–21) y (11–22). Es un auxiliar de diseño que facilita la iteración requerida para determinar una geometría aceptable para una columna que soporta una carga especificada con factor de diseño deseado. Observe que los datos están en unidades del sistema inglés. Abajo a la izquierda de la hoja de datos, el diseñador ingresa los datos requeridos para las ecuaciones (11–21) y (11–22, junto con los

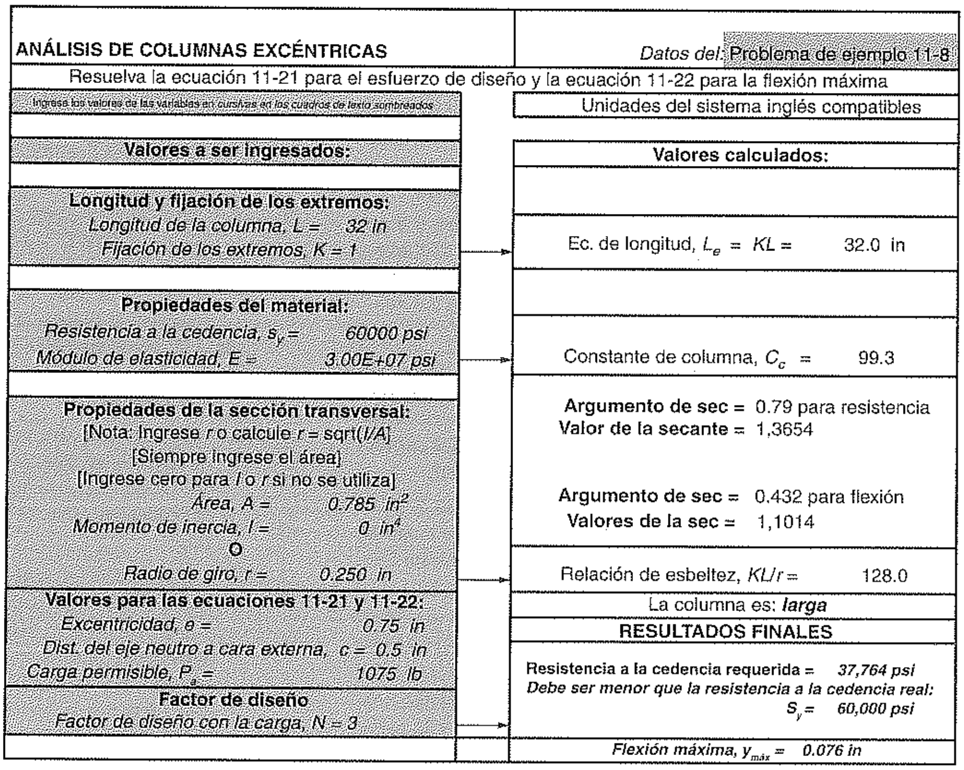


FIGURA 11–16
Hoja de cálculo para el análisis de columnas excéntricas – unidades del sistema inglés.

demás datos mencionados para hojas de cálculo de análisis de columnas anteriores. La sección **"FINAL RESULTS"**, abajo a la derecha, muestra el valor calculado de la resistencia a la cedencia requerida del material para la columna y lo compara con el valor ingresado por el diseñador cerca de la parte superior izquierda. El diseñador debe asegurarse de que el valor real es mayor que el valor calculado probando diferentes valores del diámetro. La máxima parte del lado derecho de la hoja de cálculo da la flexión máxima calculada que ocurre a la mitad de la columna.

REFERENCIAS

1. Aluminum Association, *Aluminum Design Manual*, Washington, DC., 2005.
2. American Institute of Steel Construction, *Steel Construction Manual*, 9ª ed., Chicago, IL, 2005.
3. Mott, Robert L., *Machine Elements in Mechanical Design*, 4ª ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2004.
4. Spotts, M. F., T. E. Skoup y L. E. Hornberger, *Design of Machine Elements*, 8ª ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2004.
5. Timoshenko, S. *Strenght of Materials*, Vol. 2, 2ª ed., Van Nostrand Reinhold, Nueva York, 1941.
6. Timoshenko, S. y J. M. Gere. *Theory of Elastic* Stability, 2ª ed., McGraw–Hill, Nueva York, 1961.

PROBLEMAS

11–1.M Determine la carga crítica para una columna con extremos articulados hecha con una barra circular de acero AISI 1020 laminado en caliente. El diámetro de la barra es de 20 mm y su longitud de 800 mm.

11–2.M Repita el problema 11–1 con la longitud de 350 mm.

11–3.M Repita el problema 11–1 con la barra hecha de aluminio 6061–T6 en lugar de acero.

11–4.M Repita el problema 11–1 con los extremos fijos en lugar de extremos de pasador.

11–5.M Repita el problema 11–1 con una barra cuadrada de acero con la misma área de sección transversal que la barra circular.

11–6.M Para un tubo de acero PIPE 25STD (cédula 40 de 1 in) utilizado como columna, determine la carga critica si tiene que ser 2.05 m de longitud. El material es similar al acero AISI 1020 laminado en caliente. Calcule la carga crítica para cada una de las cuatro condiciones de apoyo descritas en la figura 11–3.

11–7.M La sección transversal de una barra rectangular de acero de 210 mm de longitud es de 12 mm por 25 mm. Suponiendo que los extremos de la barra son articulados y que es de acero AISI 1141 OQT 1300, calcule la carga crítica cuando la barra se somete a una carga de compresión axial.

11–8.M Calcule la carga permisible sobre una viga S150 × 18.6 (S6 × 12.5) utilizada como columna de 5.45 m de longitud con extremos fijos. El material es acero ASTM A36. Use la fórmula del AISC.

11–9.E Se va a diseñar una plataforma elevada de 20 ft por 40 ft para que soporte una carga uniforme de 75 libras por pie cuadrado. Se propone se utilice un tubo de acero cédula 40 de 3 in estándar como columna para soportar la plataforma a 8 ft sobre el nivel del suelo con la base fija y la parte superior libre. ¿Cuántas columnas se requerirían si se desea un factor de diseño de 3.0? Use s_y = 30 000 psi.

11–10.M Una viga I de aluminio 6061–T6, I254 × 12.87(I10 × 8.646), se utiliza como columna con dos extremos de pasador. Es de 2.80 m de longitud. Con las ecuaciones (11.17b) y (11–18b), calcule la carga permisible sobre la columna.

11–11.M Calcule la carga permisible para la columna descrita en el problema 11–10 si la longitud es de sólo 1.40 m.

11–12.E Se utiliza como columna una viga W8 × 10 de acero ASTM A992 de 12.50 ft de longitud. Sus extremos están afianzados de tal modo que L_e es aproximadamente de $0.80L$. Con las fórmulas del AISC, determine la carga permisible sobre la columna.

11–13.E Una columna se compone de cuatro ángulos, como se muestra en la figura P11–13. Los ángulos se mantienen unidos con barras de sujeción, las cuales pueden ser ignoradas en el análisis de las propiedades geométricas. Utilizando la ecuación de Euler o la ecuación de Johnson con $L_e = L$ y un factor de diseño de 3.0, calcule la carga permisible sobre la columna si es de 18.4 ft de longitud. Los ángulos son de acero ASTM A36.

11–14.E Calcule la carga permisible sobre una columna compuesta que tiene la sección transversal mostrada en la figura P11–14. Use $L_e = L$ y aluminio 6061–T6. La columna es de 10.5 ft de longitud. Use las fórmulas de la Aluminum Association.

11–15.C La figura P11–15 muestra una viga apoyada en sus extremos por juntas de pasador. La barra inclinada en la parte superior soporta el extremo derecho de la viga, pero también aplica una fuerza de compresión en la viga. ¿Sería satisfactoria una viga S150 × 18.6 (S6 × 12.5) estándar en esta aplicación si soporta 1320 kg en su extremo? La viga es de acero ASTM A36.

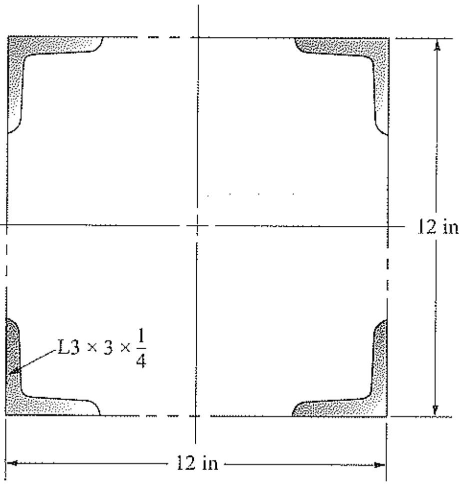


FIGURA P11–13 Sección de columna compuesta del Problema de ejemplo 11–13.

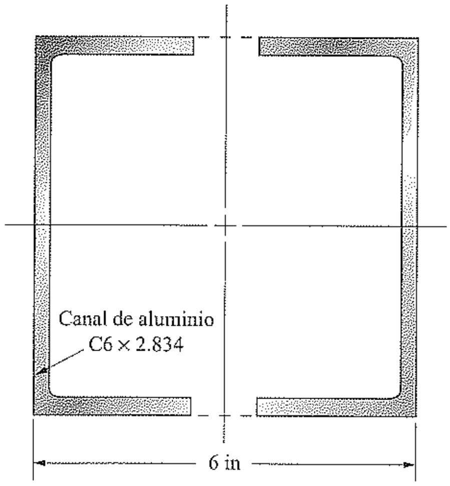


FIGURA P11–14 Sección transversal de columna compuesta del problema 11–14.

11–16.E El eslabón de un mecanismo de 8.40 de largo, tiene una sección transversal rectangular de ¼ in × ⅛ in y se somete a una carga de compresión de 50 lb. Si los extremos del eslabón son de pasador, ¿es seguro contra pandeo? Se utiliza acero AISI 1040 en el eslabón?

11–17.M El pistón de un amortiguador es de 12 mm de diámetro y su longitud máxima afuera del cuerpo del amortiguador es de 190 mm. La biela es de acero AISI 1141 OQT. Considere que un extremo es de pasador y el otro fijo. ¿Qué carga sobre la biela sería de un tercio de la carga de pandeo crítica?

11–18.E Una barra estabilizadora circular de un sistema de suspensión automotriz se carga a compresión. Se somete a una carga axial de 1375 lb y está soportada en sus extremos por conexiones de pasador, a 28.5 in uno de otro. ¿Sería satisfactoria una barra de acero AISI 1020 laminado en caliente de 0.800 in de diámetro para esta aplicación?

11–19.E Se va a diseñar una estructura para que soporte una tolva de grandes dimensiones sobre una máquina de extrusión de plástico, como se ilustra en la figura P11–19. La tolva tiene que ser soportada por cuatro columnas las que comparten la carga por igual. La estructura se refuerza con riostras cruzadas. Se propone que las columnas sean de tubo cédula 40 estándar de 2 in. Se empotrarán en el suelo. Debido al arriostramiento en cruz, el extremo superior de cada columna se comporta como si estuviera redondeado o fuera de pasador. El material del tubo es acero AISI 1020 laminado en caliente. La tolva se diseña para que contenga 20 000 lb de plástico en polvo. ¿Son adecuadas las columnas propuestas para esta carga?

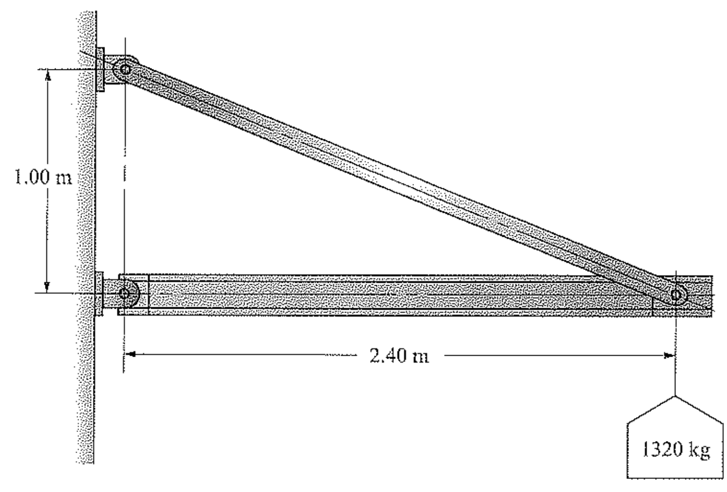


FIGURA P11–15 Estructura del problema 11–15.

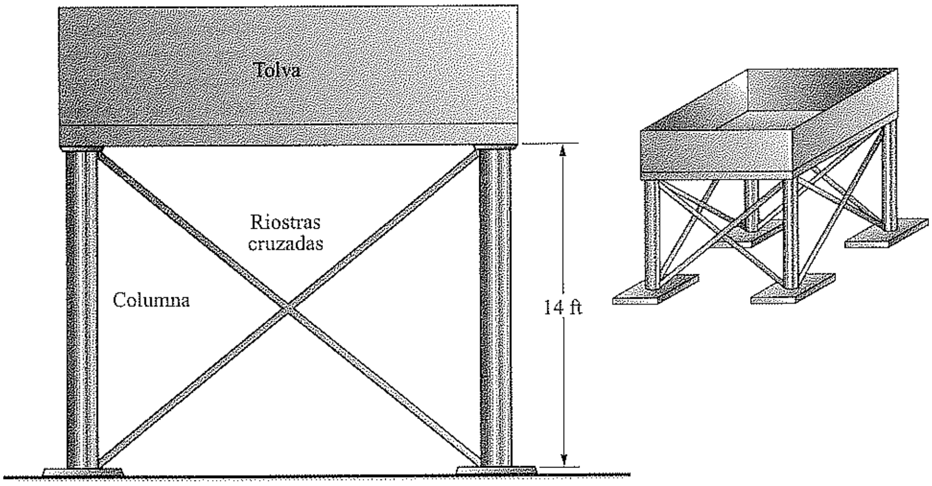


FIGURA P11–19 Tolva de los problemas 11–19 y 11–20.

11–20.E Analice cómo se vería afectado el diseño de la columna del problema 11–19 si un descuidado conductor de un montacargas embiste las riostras cruzadas y las rompe.

11–21.E El ensamble mostrado en la figura P11–21 se utiliza para probar piezas jalándolas repetidamente con el cilindro hidráulico, el cual es capaz de ejercer una fuerza máxima de 3000 lb. Las piezas del ensamble de interés en este caso son las columnas. Se propone que las dos columnas sean barras cuadradas de ¼ in por lado, de aleación de aluminio 6061–T6. Las columnas tienen su base empotrada y su extremo superior libre. Determine la aceptabilidad de la propuesta.

11–22.E La figura P11–22 muestra el diseño propuesto de una prensa hidráulica utilizada para compactar desechos sólidos. El pistón de la derecha ejerce una fuerza de 12 500 lb por conducto de la biela al ariete. La biela es recta y está centralmente cargada. Es de acero AISI 1040 WQT 1100. Calcule el factor de diseño resultante para este diseño.

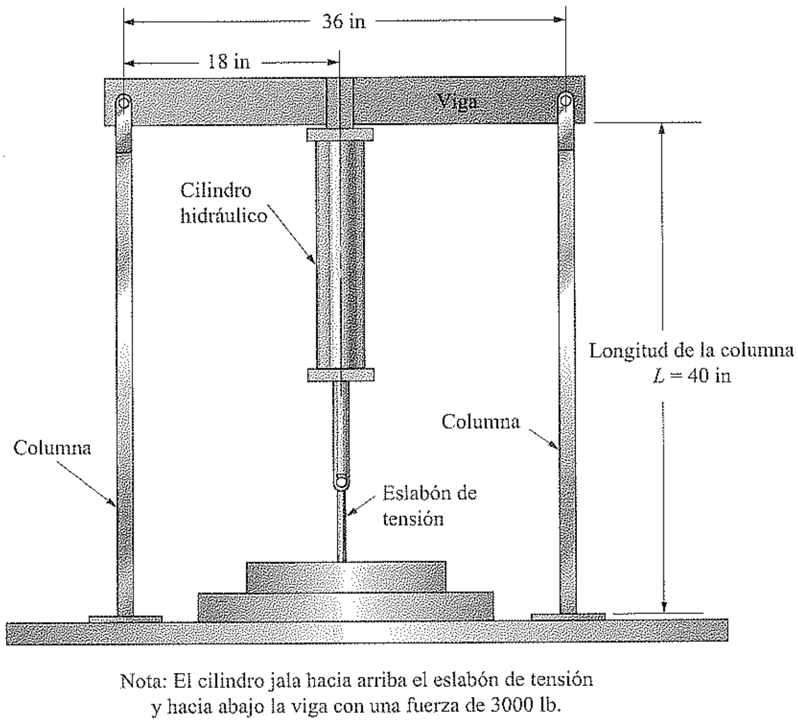


FIGURA P11–21 Dispositivo de prueba del problema 11–21.

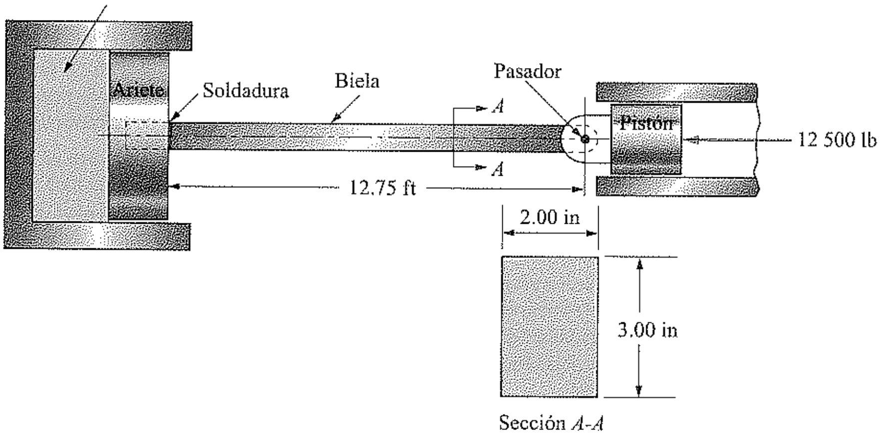


FIGURA P11–22 Compactador de desechos sólidos de los problemas 11–22, 11–23, 11–24 y 11–25.

11–23.E Para las condiciones descritas en el problema 11–22, especifique un tubo de acero estándar adecuado para usarse como biela de sección transversal circular sólida. Use un factor de diseño de 4.0.

11–24.E Para las condiciones descritas en el problema 11–22, especifique un tubo de acero estándar adecuado para usarse como biela de sección transversal circular sólida. Use un factor de diseño de 4.0. El tubo tiene que ser de acero estructural ASTM A501.

11–25.E Para las condiciones descritas en el problema 11–22, especifique una viga I estándar adecuada para usarse como biela. Use un factor de diseño de 4.0. La viga I es de aleación de aluminio 6061–T6. La conexión entre la biela y el pistón es como se muestra en la figura P11–25.

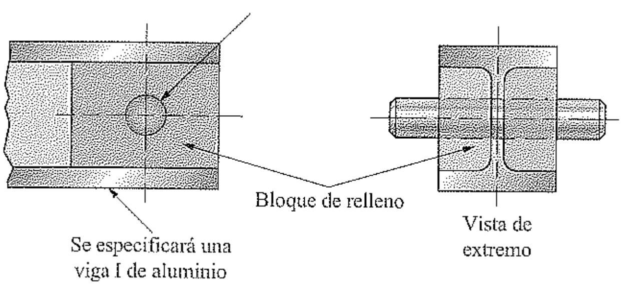


FIGURA P11–25 Conexión de un extremo de la viga I del problema 11–25.

11.26.E Se utiliza un tubo cuadrado hueco, HSS3 × 3 × 1/4, de acero ASTM A500, como columna de 16.5 ft de longitud en un edificio. Con $L_e = 0.80L$, calcule la carga permisible sobre la columna para un factor de diseño de 3.0.

11–27.E Se utiliza un tubo rectangular hueco, HSS4 × 2 × 1/4, de acero ASTM A500, grado B, como columna de 16.5 ft de longitud en un edificio. Con $L_e = 0.80L$, calcule la carga permisible sobre la columna para un factor de diseño de 3.0.

11–28.E Se arma una columna soldando dos ángulos de acero estándar de 3 × 3 × 1/4, como se muestra en la figura 11–11(f). Los ángulos son de acero estructural ASTM A36. Si la longitud de la columna es de 16.5 ft y $L_e = 0.8L$, calcule la carga permisible sobre ella para un factor de diseño de 3.0.

11–29.M Se utiliza una barra rectangular de acero AISI 1020 laminado en caliente como riostra de seguridad para sostener el ariete de una prensa punzonadora de grandes dimensiones, mientras se montan troqueles en ella. La sección transversal de la barra es de 60 mm por 40 mm. Su longitud es de 750 mm y sus extremos están soldados a placas planas gruesas apoyadas en la bancada plana de la prensa y la cara inferior plana del ariete. Especifique una carga segura que se podría aplicar a la riostra.

11–30.M Se pretende utilizar un canal de aleación de aluminio 6061 T–4, C102 × 2.586 (C4 × 1.738), como columna de 4.25 m de longitud. Se puede considerar que los extremos son de pasador. Calcule la carga permisible sobre la columna para un factor de diseño de 4.0.

11–31.M En un intento por mejorar la capacidad de soportar carga de la columna descrita en el problema 11–30, se propone utilizar la aleación 6061–T6 en lugar de la 6061–T4 para aprovechar su mayor resistencia. Evalúe el efecto de este cambio propuesto en la carga permisible.

11–32.E Calcule la carga permisible sobre la sección de columna W12 × 65 de acero ASTM A992 de 22.5 ft de longitud mostrada en la figura 11–12(b) e instalada de modo que $L_e = 0.8L$. Use el reglamento AISC.

PROBLEMAS ADICIONALES DE REPASO Y PRÁCTICA

11–33. Se utiliza un tubo rectangular hueco de acero ASTM A501, formado en caliente para soportar una carga de compresión axial. El tubo es de 13.6 ft de longitud y sus extremos están rígidamente fijos. Calcule la carga permisible sobre la columna para un factor de diseño de 3.0.

11–34. Repita el problema 11–33 si el tubo está lateralmente arriostrado en un punto a 80 in de su extremo inferior.

11–35. Repita el problema 11–33 si el extremo superior del tubo es de pasador.

11–36. Repita el problema 11–33 si el tubo es HSS3 × 3 × 1/4.

11–37. Los extremos de un tubo de acero rectangular hueco, HSS102 × 51 × 6.4 (4 × 2 × 1/4) son articulados. El tubo es de 2.65 m de longitud y soporta una carga de compresión axial de 75.0 kN. Calcule el factor de diseño que resulta con este diseño. Use acero ASTM A501.

11–38. Rediseñe la columna descrita en el problema 11–37 para que produzca un factor de diseño no menor que 3.0. Verifique si su rediseño es satisfactorio.

11–39. La figura P11–39 muestra una armadura. Especifique un diseño adecuado para cada miembro cargado a compresión que logre un factor de diseño mínimo de 3.0.

11–40. Para la armadura de la figura P11–40, especifique un diseño adecuado para cada miembro cargado a compresión que logre un factor de diseño mínimo de 2.5.

11–41. Para la armadura de la figura P11–41, especifique un diseño adecuado para cada miembro cargado a compresión que logre un factor de diseño mínimo de 2.5.

11–42. La eslinga mostrada en la figura P11–42 tiene que soportar una carga de 18 000 lb. Diseñe el travesaño.

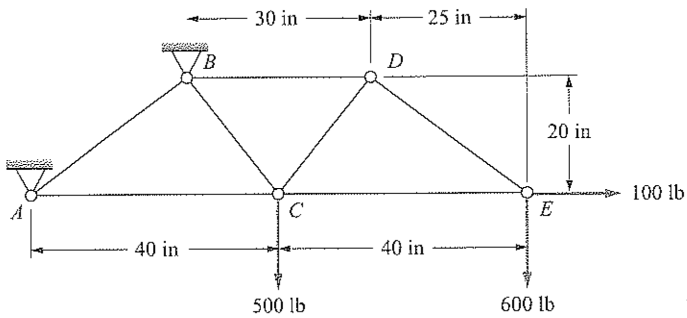


FIGURA P11–39 Armadura del problema 11–39.

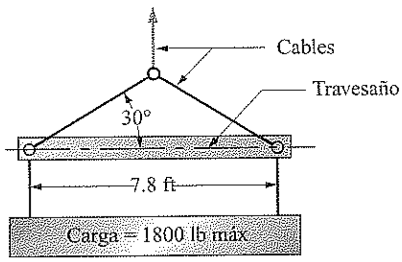


FIGURA P11–42

11–43. Repita el problema 11–42 si el ángulo mostrado cambia de 30° a 15°.

Columnas combadas: determine P_a con $N = 3$.

11–44. Repita el problema 11–1 para una columna con una combadura inicial de 4.0 mm.

11–45. Repita el problema 11–7 para una columna con una combadura inicial de 1.60 mm.

11–46. Repita el problema 11–10 para una columna con una combadura inicial de 14.0 mm.

11–47. Repita el problema 11–12 para una columna con una combadura inicial de 0.75 in.

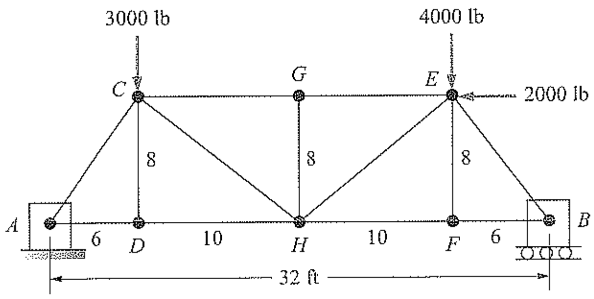


FIGURA P11–40

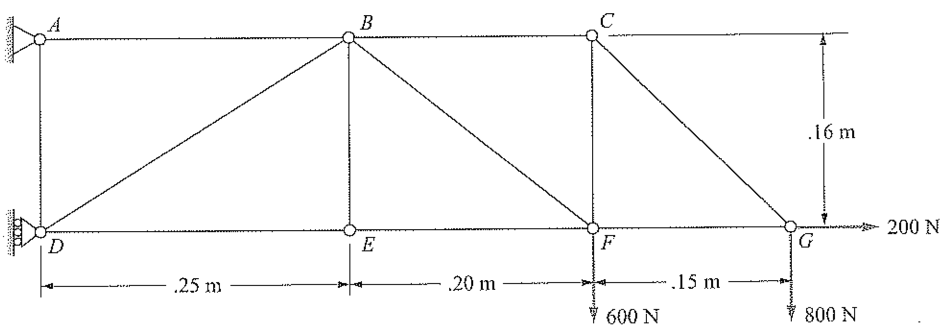


FIGURA P11–41

11–48. Repita el problema 11–3 para una columna con una combadura inicial de 1.25 in.

11–49. Repita el problema 11–37 para una columna con una combadura inicial de 32 mm.

Columnas excéntricamente cargadas

11–50. Una columna de aluminio (6061–T4) de 42 in de longitud tiene una sección transversal de 1.25 in por lado. Soporta una carga de compresión de 1250 lb, aplicada con una excentricidad de 0.60 in; calcule el esfuerzo máximo en la columna y la flexión máxima.

11–51. Se utiliza un tubo de acero (AISI 1020 laminado en caliente) estándar PIPE 75STD (cédula 40 de 3 in) como columna (vea el apéndice A–12). Se aplica una carga de compresión de 30.5 kN con una excentricidad de 150 mm; calcule el esfuerzo máximo en la columna y la flexión máxima.

11–52. El eslabón de conexión de un mecanismo es de 14.75 in de longitud y su sección transversal es de 0.250 por lado. Es de acero inoxidable AISI 301 recocido. Use $E = 28\,000$ psi. Soporta una carga de compresión de 45 lb con una excentricidad de 0.30 in; calcule el esfuerzo máximo y la flexión máxima.

11–53. Se propone utilizar un tubo de acero de acero cuadrado, de 40 in de longitud como puntal para sostener el ariete de una prensa punzonadora durante la instalación de troqueles nuevos. El ariete pesa 75 000 lb. El puntal se hizo de tubería estructural HSS4 × 4 × 1/4 de acero similar al acero estructural, ASTM A500, grado C. La carga aplicada por el ariete podría tener una excentricidad de 0.50 in. ¿Sería seguro el puntal?

11–54. Calcule el esfuerzo y flexión máximos que pueden esperarse en el miembro de acero de una máquina que soporta una carga excéntrica, como se muestra en la figura P11–54. La carga P es de 1000 lb. Si se desea un factor de diseño de 3, especifique un acero adecuado.

11–55. Se aplica una carga axial de 4000 lb a un canal de acero estructural ASTM A36, C5 × 9, de 112 in de longitud. La línea de acción de la carga actúa a la mitad de la altura del alma y a la mitad de los patines. Los extremos son de pasador. ¿Sería adecuado el canal si se desea un factor de diseño de 3.0?

11–56. La figura P11–56 muestra una columna de acero estructural ASTM A500, grado B, HSS4 × 4 × 1/2. Para cumplir con una restricción de montaje especial, la carga se aplica excéntricamente como se muestra. Determine la cantidad de carga que la columna puede soportar con seguridad. El extremo superior de la columna está soportado lateralmente por la estructura.

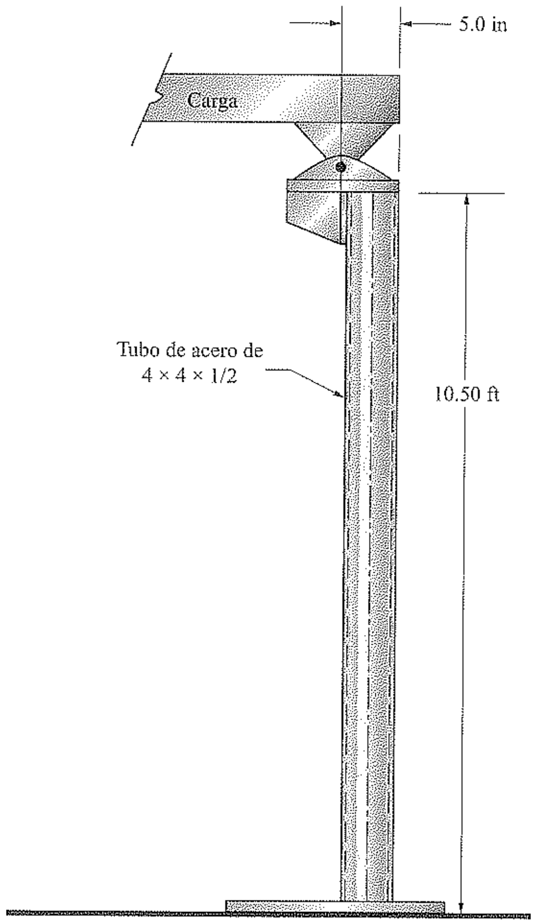


FIGURA P11–56

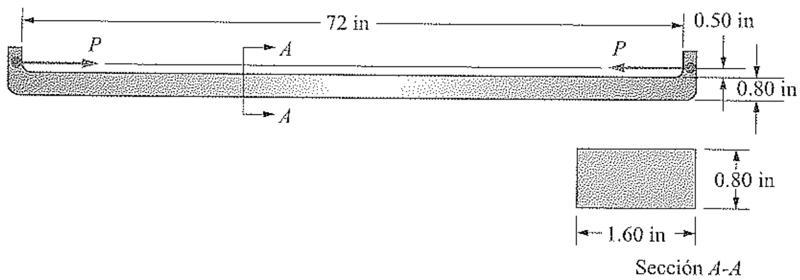


FIGURA P11–54

11–57. El dispositivo mostrado en la figura P11–57 se somete a fuerzas opuestas F. Determine la carga permisible para lograr un factor de diseño de 3. El dispositivo es de aluminio 6061–T6.

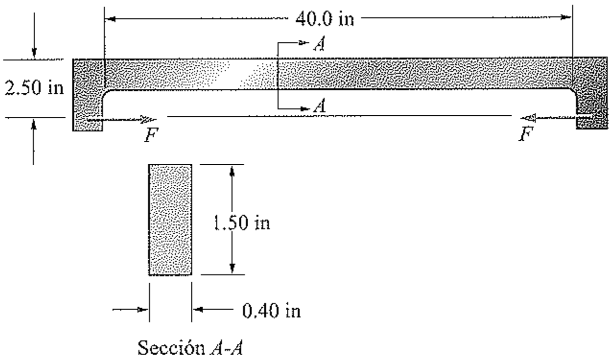


FIGURA P11–57

11–58. Un cilindro hidráulico ejerce una fuerza de 5200 N para mover una pesada pieza fundida a lo largo de una transportadora. El diseño del empujador hace que la carga se aplique excéntricamente a la biela como se muestra en la figura P11–58. ¿Es seguro el pistón bajo esta carga si es de acero inoxidable AISI501 OQT 1000?

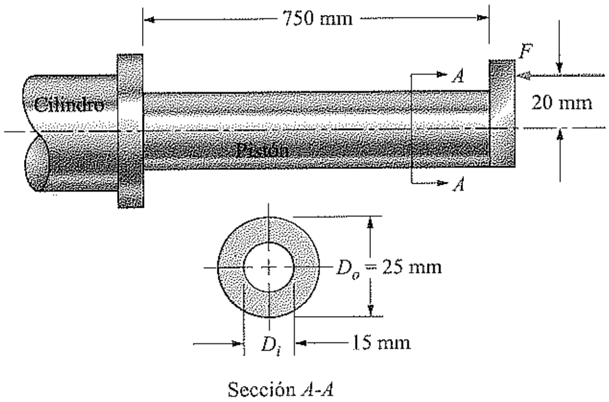


FIGURA P11–58

11–59. Se propone utilizar un tubo de acero cédula 40 de 2 in estándar para soportar el techo de un porche mientras se desinstala. Su longitud es de 13.0 ft. El tubo es de acero estructural ASTM A501.

(b) Determine la carga segura sobre el tubo para lograr un factor de diseño de 3 si el tubo es recto.

(c) Determine la carga segura si el tubo tiene una combadura inicial de 1.25 in.

TAREAS PARA RESOLVERSE CON COMPUTADORA

1. Escriba un programa u hoja de cálculo para analizar diseños de columna propuestos siguiendo el procedimiento descrito en la sección 11–8. Haga que el usuario ingrese todos los datos esenciales de diseño, tales como el material, la fijación de los extremos, la longitud y las propiedades de la sección transversal. Haga que el programa dé la carga crítica y la carga permisible para un factor de diseño dado.

Adiciones a la tarea 1

(a) Incluya una tabla de datos sobre tubo de acero cédula 40 estándar para que el programa los utilice para determinar las propiedades de la sección transversal para un tamaño de tubo especificado.

(b) Diseñe el programa para que maneje columnas de sección transversal circular sólida y calcule las propiedades de la sección transversal para un diámetro dado.

(c) Agregue una tabla de datos de tubería cuadrada de acero estructural estándar para que el programa los utilice para determinar las propiedades de la sección transversal para un tamaño especificado.

(d) Haga que el programa utilice las especificaciones del AISC como se indica en la sección 11–11 para calcular la carga permisible y el factor de seguridad para columnas de acero.

(e) Haga que el programa utilice las especificaciones de la Aluminum Association como se indica en la sección 11–12 para calcular la carga permisible para columnas de aluminio 6061–T6.

2. Escriba un programa para diseñar una columna de sección transversal circular sólida para que soporte una carga dada con un factor de diseño dado. Advierta que el programa tendrá que verificar que se está utilizando el método correcto —la fórmula de Euler para columnas largas o la fórmula de Johnson para columnas cortas— después de que se hace una suposición inicial.

3. Escriba un programa para diseñar una columna de sección transversal cuadrada sólida para que soporte una carga dada con un factor de diseño dado.

4. Escriba un programa para seleccionar tubo de acero cédula 40 adecuado para que soporte una carga dada con un factor de diseño dado. Se podría diseñar el programa para que busque en una tabla de datos de secciones de tubo estándar desde la menor hasta la mayor y un tubo adecuado. Para cada sección de prueba, se podría calcular la carga permisible con la fórmula de Euler o la fórmula de Johnson, como se requiera, y compararla con la carga de diseño.

5. Elabore una hoja de cálculo para analizar una columna combada como se describe en la sección 11–13.

6. Elabore una hoja de cálculo para analizar una columna excéntricamente cargada como se describe en la sección 11–13.